



Kompleksitas Graf *Cocktail Party* dan Graf Sandat Berdasarkan Spektrum Laplacian

Suryani¹ , Fransiskus Fran² , Bayu Prihandono³

Program Studi Matematika, Universitas Tanjungpura, Pontianak, Indonesia

* Corresponding Author. E-mail: fransiskusfran@math.untan.ac.id

ARTICLE INFO

Article History:

Received: 25-Jun. 2025

Revised: 09-Des 2025

Accepted: 30-Jun 2026

Keywords:

pohon perentang, nilai eigen, matriks Laplacian.

ABSTRACT

Misalkan G adalah graf terhubung dan tidak berarah. Setiap graf terhubung G memiliki pohon perentang, yaitu subgraf G yang terdiri dari seluruh simpul dalam graf G dan membentuk pohon. Kompleksitas graf G , yang dinotasikan dengan $\tau(G)$, merupakan banyaknya pohon perentang pada graf G . Dalam artikel ini, digunakan pendekatan spektrum Laplacian untuk menentukan kompleksitas graf, khususnya graf *Cocktail Party* dan graf Sandat. Spektrum Laplacian merupakan matriks yang dibentuk dari susunan nilai eigen matriks Laplacian dan multiplisitasnya. Penelitian diawali dengan menentukan matriks *adjacency* dan matriks *degree* dari graf *Cocktail Party* CP_k untuk $k = 2, 3$ dan graf Sandat St_k untuk $k = 1, 2, 3$, kemudian dibentuk matriks Laplacian serta polinomial karakteristik matriks Laplacian. Selanjutnya, dirumuskan formula polinomial karakteristik ke- k matriks Laplacian masing-masing graf. Pembuktian kebenaran formula polinomial karakteristik dilakukan dengan memanfaatkan matriks blok. Berdasarkan hasil tersebut, dirumuskan dan dibuktikan formula spektrum Laplacian, serta formula kompleksitas graf untuk graf *Cocktail Party* dan Sandat. Hasil dari penelitian ini adalah rumusan spektrum Laplacian dan kompleksitas dari graf *Cocktail Party* serta graf Sandat.

Let G be a connected and undirected graph. Every connected graph G contains a spanning tree, which is a subgraph of G that consists of all vertices in graph G and forms a tree. The complexity of graph G , denoted by $\tau(G)$, corresponds to the number of spanning trees in graph G . In this article, the Laplacian spectrum approach is employed to ascertain the complexity of graphs, with particular focus on the Cocktail Party and Sandat graphs. The Laplacian spectrum is a matrix formed by the arrangement of the eigenvalues obtained from the Laplacian matrix and its multiplicities. The study begins by determining the adjacency matrix and the degree matrix of the Cocktail Party graph CP_k for $k = 2, 3$ and the Sandat graph St_k for $k = 1, 2, 3$, followed by the construction of the Laplacian matrix and its characteristic polynomial. Subsequently, the k -th characteristic polynomial formula of the Laplacian matrix for each graph is formulated. The validity of the characteristic polynomial formula is proven using block matrices. Based on these results, the Laplacian spectrum formula and the graph complexity formula for the Cocktail Party and Sandat graphs are formulated and proven. The principal outcomes of this study are the formulation of the Laplacian spectrum and complexity of the Cocktail Party graph and Sandat graph.

This is an open access article under the CC-BY-SA license



How to Cite:

Fran, F., Suryani, & Prihandono, B. (2026). Kompleksitas graf cocktail party dan graf sandat berdasarkan spektrum Laplacian. *PYTHAGORAS: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, 21(1), 27–36.
<https://doi.org/10.21831/pythagoras.v21i1.87662>

PENDAHULUAN

Teori graf merupakan cabang kajian matematika diskret yang mempelajari mengenai simpul dan sisi. Graf sering digunakan untuk memodelkan berbagai jaringan yang ada di dunia nyata, seperti jaringan sosial, jaringan listrik, dan jaringan transportasi (Aksoy dkk., 2019; Peranginangin, 2024; Ubaidillah & Abrori, 2014). Dalam perkembangan teori graf, salah satu aspek yang menarik untuk diteliti ialah teori spektral graf, yaitu kajian yang mempelajari tentang sifat-sifat graf yang berkaitan dengan polinomial karakteristik, nilai eigen, dan multiplisitasnya

yang menjadi dasar dalam penyusunan spektrum suatu graf (Agustina dkk., 2022). Artikel ini secara khusus membahas spektrum Laplacian, yaitu spektrum yang diperoleh dari matriks Laplacian.

Kompleksitas graf G , yang dinotasikan dengan $\tau(G)$, adalah banyaknya pohon perentang dalam suatu graf G (Deen dkk., 2023). Dalam teori graf, pohon adalah graf tak berarah tanpa *loop* yang terhubung dan tak membentuk siklus. Selanjutnya, pohon perentang adalah subgraf dari suatu graf yang merupakan pohon dan memuat semua simpul dalam graf tersebut (Fikadila dkk., 2024). Salah satu bentuk penerapan kompleksitas graf seperti menghitung isomer kimia tertentu, yaitu senyawa yang memiliki rumus molekul sama namun dengan susunan struktur yang berbeda (Brown dkk., 1996). Kompleksitas graf merupakan salah satu topik yang terus menjadi perhatian dalam teori graf, karena berkaitan langsung dengan banyaknya pohon perentang pada graf terhubung.

Spektrum Laplacian adalah matriks berukuran $2 \times n$, yang elemen-elemen baris pertamanya merupakan nilai eigen dari matriks Laplacian suatu graf $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ yang diurutkan sedemikian sehingga $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n = 0$, dan baris keduanya merupakan multiplisitas dari masing-masing nilai eigen pada baris pertama $(m(\lambda_1), m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_n))$. Spektrum Laplacian dari suatu graf dapat digunakan untuk menentukan kompleksitas graf, sehingga penting dalam berbagai aplikasi, termasuk dalam fisika jaringan, optimisasi, dan teori aliran (Biggs, 1993; Forrow dkk., 2018; Kempton dkk., 2017). Secara teori, beberapa peneliti juga telah mengkaji spektrum Laplacian pada beberapa jenis graf seperti Umam (2019) mengkaji spektrum Laplacian pada graf Mahkota, Triyani dkk., (2024) mengkaji spektrum Laplacian pada graf Mahkota dan graf Benteng, serta Amaliyanah dkk., (2022) telah mengkaji spektrum Laplacian pada graf Kincir angin berarah.

Sejak Kirchhoff memperkenalkan Teorema Pohon Matriks untuk menghitung kompleksitas graf, berbagai pendekatan baru telah dikembangkan untuk menentukan banyaknya pohon perentang pada graf, salah satunya yaitu menggunakan spektrum Laplacian (Biggs, 1993). Perbedaan utama penelitian ini dibandingkan dengan riset terdahulu terletak pada metode perhitungan kompleksitas graf dan jenis graf yang menjadi objek kajian. Sebagian besar penelitian terdahulu menghitung kompleksitas graf menggunakan Teorema Pohon Matriks yang berfokus pada determinan matriks Laplacian. Selain itu, terdapat beberapa penelitian terdahulu yang telah membahas mengenai banyaknya pohon perentang pada berbagai jenis graf (Fran dkk., 2024, 2025; Hanssen dkk., 2024; Khattabi dkk., 2019; Rahmawati, 2016), namun penelitian mengenai spektrum Laplacian dan kompleksitas graf *Cocktail Party* dan graf Sandat masih sangat terbatas. Artikel ini secara khusus menggunakan spektrum Laplacian untuk menentukan kompleksitas graf *Cocktail Party* dan graf Sandat, sehingga artikel ini memberikan kontribusi baru dalam metode perhitungan kompleksitas graf pada jenis graf yang belum banyak dikaji sebelumnya.

Secara garis besar, penelitian ini diawali dengan menentukan matriks *adjacency* dan matriks *degree* dari graf *Cocktail Party* dan graf Sandat pada beberapa nilai k , kemudian dibentuk matriks Laplacian dan ditentukan polinomial karakteristiknya. Setelah ditemukan pola berulang pada polinomial karakteristik masing-masing graf, dirumuskan pola ke- k . Selanjutnya dilakukan pembuktian kebenaran mengenai polinomial karakteristik yang telah dirumuskan untuk kemudian dilanjutkan dengan merumuskan spektrum Laplacian dan kompleksitas graf. Karena matriks Laplacian ke- k masing-masing graf berukuran besar, maka ada berbagai pendekatan yang dapat dimanfaatkan untuk menghitung determinan dari matriks ini, seperti pemanfaatan polinomial Chebyshev (Nurliantika dkk., 2025) atau seperti yang digunakan dalam penelitian ini yaitu dengan memanfaatkan matriks blok. Melalui bantuan matriks blok untuk menghitung nilai eigen pada spektrum Laplacian dari graf *Cocktail Party* dan graf Sandat, diperoleh formula kompleksitas kedua graf tersebut.

METODE

Metodologi yang diterapkan pada artikel ini berbasis studi literatur. Langkah-langkah yang ditempuh dalam artikel ini meliputi:

1. Menentukan matriks *adjacency* dan matriks *degree* dari graf *Cocktail Party* CP_k untuk $k = 2, 3$ dan graf Sandat St_k untuk $k = 1, 2, 3$.
2. Menentukan matriks Laplacian $L = D - A$ pada graf *Cocktail Party* CP_k untuk $k = 2, 3$ dan graf Sandat St_k untuk $k = 1, 2, 3$ dengan D dan A masing-masing merupakan matriks *degree* dan matriks *adjacency*.
3. Menentukan polinomial karakteristik dari matriks Laplacian L pada graf *Cocktail Party* CP_k untuk $k = 2, 3$ dan graf Sandat St_k untuk $k = 1, 2, 3$.
4. Merumuskan formula polinomial karakteristik ke- k dari matriks Laplacian pada graf *Cocktail Party* CP_k dan graf Sandat St_k .

5. Membuktikan kebenaran dari formula polinomial karakteristik yang telah dirumuskan dengan bantuan matriks blok.
6. Merumuskan formula spektrum Laplacian dari polinomial karakteristik.
7. Membuktikan kebenaran dari formula spektrum Laplacian yang telah dirumuskan.
8. Merumuskan formula kompleksitas graf *Cocktail Party* CP_k dan graf Sandat St_k .
9. Membuktikan kebenaran dari formula kompleksitas graf yang telah dirumuskan.

HASIL PENELITIAN

Hasil penelitian pada artikel ini telah diperoleh polinomial karakteristik dari matriks Laplacian graf *Cocktail Party* CP_k untuk $k \in \mathbb{N}, k > 1$ dan graf Sandat St_k untuk $k \in \mathbb{N}$, yaitu $p(CP_k, \lambda) = \lambda(\lambda - 2k)^{k-1}(\lambda - (2k - 2))^k$ dan $p(St_k, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{k-1}(\lambda - 2)^k(\lambda - 4)^k(\lambda - (3k + 1))$. Lebih lanjut telah diperoleh pula spektrum Laplacian dan kompleksitas dari kedua graf tersebut, yaitu spektrum Laplacian dan kompleksitas dari graf *Cocktail Party* CP_k untuk $k \in \mathbb{N}, k > 1$ adalah

$$Spec_L(CP_k) = \begin{bmatrix} 2k & 2k-2 & 0 \\ k-1 & k & 1 \end{bmatrix}, \tau(CP_k) = (2k)^{k-2}(2k-2)^k$$

dan spektrum Laplacian serta kompleksitas dari graf Sandat St_k untuk $k \in \mathbb{N}$ adalah

$$Spec_L(St_k) = \begin{bmatrix} 3k+1 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & k & k & k-1 & 1 \end{bmatrix}, \tau(St_k) = 2^{3k}.$$

Hasil penelitian ini selanjutnya dituangkan dalam bab pembahasan.

PEMBAHASAN

Spektrum Laplacian dari graf terhubung G , dinotasikan sebagai $Spec_L(G)$, adalah matriks berukuran $2 \times n$, yang apabila nilai eigen dari matriks Laplacian merupakan $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n = 0$, dan multiplisitasnya merupakan $(m(\lambda_1), m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_n))$, maka spektrum Laplacian dapat dituliskan (Amaliyanah dkk., 2022)

$$Spec_L(G) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ m(\lambda_1) & m(\lambda_2) & \dots & m(\lambda_n) \end{bmatrix}.$$

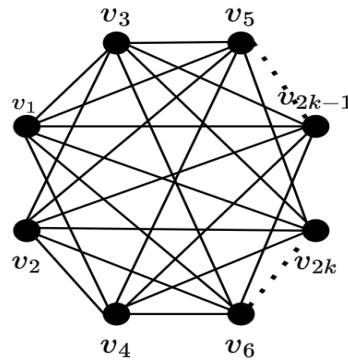
Karena matriks Laplacian merupakan matriks simetri, maka multiplisitas aljabarnya sama dengan multiplisitas geometrinya, sehingga disebut sebagai multiplisitas saja (Agustina dkk., 2022).

Berikut diberikan teorema untuk menghitung kompleksitas graf berdasarkan spektrum Laplacian.

Teorema 1. (Biggs, 1993) Dimisalkan $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{n-1} \geq \lambda_n = 0$ spektrum Laplacian dari graf G dengan n simpul, maka kompleksitas graf G ialah

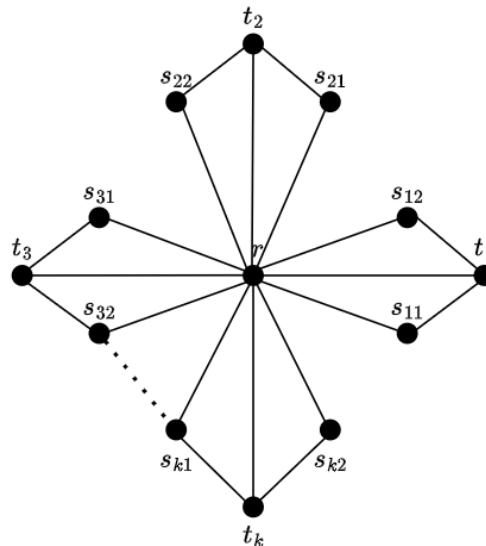
$$\tau(G) = \frac{1}{n} \prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i$$

Penelitian ini membahas spektrum Laplacian dan kompleksitas dua jenis graf yaitu graf *Cocktail Party* dan graf Sandat. Didefinisikan himpunan simpul dan himpunan sisi pada graf *Cocktail Party* $CP_k = (V(CP_k), E(CP_k))$ dengan $k \in \mathbb{N}, k > 1$ sebagai $V(CP_k) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{2k-1}, v_{2k}\}$ dan $E(CP_k) = \{v_i v_j \mid 1 \leq i, j \leq 2k, i \neq j, \text{ dan } \begin{matrix} j \neq i+1, \text{ jika } i \text{ ganjil} \\ j \neq i-1, \text{ jika } i \text{ genap} \end{matrix}\}$. Graf *Cocktail Party* merupakan graf yang terdiri dari dua baris simpul yang berpasangan dengan semua simpul kecuali yang berpasangan dihubungkan dengan sebuah sisi (Miftahudi & Kusmayadi, 2020). Berdasarkan definisi ini, graf *Cocktail Party* CP_k dapat dikonstruksi seperti Gambar 1 berikut ini.



Gambar 1 Graf Cocktail Party

Misal diberikan graf Sandat $St_k = (V(St_k), E(St_k))$ dengan $k \in \mathbb{N}$. Definisikan himpunan simpul dan himpunan sisi pada graf Sandat sebagai $V(St_k) = \{r, s_{ij}, t_i | 1 \leq i \leq k \text{ dan } 1 \leq j \leq 2\}$ dan $E(St_k) = \{rt_i, rs_{ij}, s_{ij}t_i | 1 \leq i \leq k \text{ dan } 1 \leq j \leq 2\}$ (Retnoningsih dkk., 2022). Berdasarkan definisi ini, graf Sandat St_k dapat dikonstruksi seperti Gambar 2 berikut ini.



Gambar 2 Graf Sandat

Selanjutnya, matriks blok adalah matriks yang dibagi atau dipartisi menjadi beberapa bagian atau blok dengan ukuran yang lebih kecil, sehingga memudahkan perhitungan determinan atau nilai eigen pada matriks dengan ukuran yang besar. Untuk menentukan formula spektrum Laplacian graf *Cocktail Party* dan graf Sandat, digunakan teorema matriks blok berikut ini.

Teorema 2. (Deen dkk., 2023) Dimisalkan P dan Q merupakan matriks blok berukuran $l \times l$, dan $Y =$

$$\begin{bmatrix} P & Q & Q & \cdots & Q & Q \\ Q & P & Q & \cdots & Q & Q \\ Q & Q & P & \cdots & Q & Q \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ Q & Q & Q & \cdots & P & Q \\ Q & Q & Q & \cdots & Q & P \end{bmatrix}_{k \times k},$$

Maka $\det(Y) = (\det(P - Q))^{k-1}(\det(P + (k - 1)Q))$.

Teorema 3. (Hetmaniok dkk., 2017) Determinan dari matriks blok *arrowhead* berikut

$$M_n = \begin{bmatrix} (A_{11})_{b_1 \times b_1} & (A_{12})_{b_1 \times b_2} & (A_{13})_{b_1 \times b_3} & \cdots & (A_{1n})_{b_1 \times b_n} \\ (A_{21})_{b_2 \times b_1} & (A_{22})_{b_2 \times b_2} & O_{b_2 \times b_3} & \cdots & O_{b_2 \times b_n} \\ (A_{31})_{b_3 \times b_1} & O_{b_3 \times b_2} & (A_{33})_{b_3 \times b_3} & \cdots & O_{b_3 \times b_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (A_{n1})_{b_n \times b_1} & O_{b_n \times b_2} & O_{b_n \times b_3} & \cdots & (A_{nn})_{b_n \times b_n} \end{bmatrix}$$

adalah $\det M_n = \det(A_{11} - \sum_{i=2}^n A_{1i} A_{ii}^{-1} A_{i1}) \prod_{j=2}^n \det(A_{jj})$

dengan $\det A_{ii} \neq 0$, untuk $i = 2, 3, \dots, n$ dan O adalah matriks blok yang semua entri-entrinya 0.

Selanjutnya, spektrum Laplacian dan kompleksitas dari graf *Cocktail Party* serta graf Sandat diuraikan dalam subbab berikut.

1. Spektrum Laplacian dan Kompleksitas Graf *Cocktail Party*

Spektrum Laplacian dari graf *Cocktail Party*, dapat ditentukan dengan menemukan polinomial karakteristik matriks Laplacian. Terlebih dahulu dikonstruksi matriks *adjacency* dan matriks *degree* untuk CP_2 dan CP_3 , kemudian dibentuk matriks Laplacian dan dihitung polinomial karakteristiknya. Setelah itu, dibentuk polinomial karakteristik matriks Laplacian graf CP_k . Polinomial karakteristik matriks Laplacian ditentukan dengan menggunakan persamaan $p(CP_k, \lambda) = \det(\lambda I - L(CP_k))$ dengan $L(CP_k)$ merupakan matriks Laplacian dari graf *Cocktail Party* CP_k . Tabel 1 merupakan polinomial karakteristik matriks Laplacian dari graf *Cocktail Party* CP_k untuk $k \in \mathbb{N}, k > 1$.

Tabel 1 Polinomial karakteristik matriks Laplacian graf CP_k

Graf <i>Cocktail Party</i> (CP_k)	Polinomial karakteristik matriks Laplacian
CP_2	$\lambda(\lambda - 2)^2(\lambda - 4)$
CP_3	$\lambda(\lambda - 4)^3(\lambda - 6)^2$
$\vdots$	$\vdots$
CP_k	$\lambda(\lambda - 2k)^{k-1}(\lambda - (2k - 2))^k$

Berdasarkan bentuk polinomial karakteristik pada Tabel 1, diperoleh pola umum atau pola ke- k polinomial karakteristik matriks Laplacian dari graf *Cocktail Party* CP_k dengan $k \in \mathbb{N}, k > 1$ sebagaimana dituangkan dalam Lema 4.

Lema 4. Polinomial karakteristik matriks Laplacian pada graf *Cocktail Party* (CP_k) adalah

$$p(CP_k, \lambda) = \lambda(\lambda - 2k)^{k-1}(\lambda - (2k - 2))^k$$

Bukti. Matriks Laplacian dari graf *Cocktail Party* adalah $L(CP_k) = D(CP_k) - A(CP_k)$ dengan $A(CP_k)$ adalah matriks ketetanggaan (*adjacency*) graf *Cocktail Party* dan $D(CP_k)$ adalah matriks derajat (*degree*) dengan elemen-elemen diagonalnya merupakan derajat dari setiap simpul di graf *Cocktail Party*. Matriks Laplacian dari graf *Cocktail Party* dapat dikonstruksi sebagai

$$L(CP_k) = \begin{bmatrix} 2k-2 & 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & 2k-2 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2k-2 & 0 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2k-2 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & 2k-2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & 0 & 2k-2 \end{bmatrix}_{2k \times 2k}$$

Polinomial karakteristik dari matriks Laplacian $L(CP_k)$ adalah $p(CP_k, \lambda) = \det(\lambda I - L(CP_k))$. Akar-akar karakteristik diperoleh dari menyelesaikan persamaan karakteristik $p(CP_k, \lambda) = 0$. Selanjutnya, untuk memperoleh akar-akar karakteristik dari matriks $\lambda I - L(CP_k)$, determinan matriksnya dicari dengan menggunakan matriks blok.

$$\lambda I - L(CP_k) = \begin{bmatrix} \lambda - (2k-2) & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - (2k-2) & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda - (2k-2) & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \lambda - (2k-2) & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & \lambda - (2k-2) & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & \lambda - (2k-2) \end{bmatrix}_{2k \times 2k}$$

Dimisalkan

$$P = \begin{bmatrix} \lambda - (2k-2) & 0 \\ 0 & \lambda - (2k-2) \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda I - L(CP_k)) = \begin{bmatrix} P & Q & Q & \cdots & Q \\ Q & P & Q & \cdots & Q \\ Q & Q & P & \cdots & Q \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q & Q & Q & \cdots & P \end{bmatrix}_{k \times k}$$

Maka

$$P - Q = \begin{bmatrix} \lambda - (2k-2) & 0 \\ 0 & \lambda - (2k-2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 2k + 1 & -1 \\ -1 & \lambda - 2k + 1 \end{bmatrix}$$

$$P + (k-1)Q = \begin{bmatrix} \lambda - (2k-2) & 0 \\ 0 & \lambda - (2k-2) \end{bmatrix} + (k-1) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - k + 1 & k-1 \\ k-1 & \lambda - k + 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga dengan blok matriks akan diperoleh $\det(\lambda I - L(CP_k)) = (\det(P - Q))^{k-1} \det(P + (k-1)Q)$ sebagai berikut

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - L(CP_k)) &= \left(\det \begin{bmatrix} \lambda - 2k + 1 & -1 \\ -1 & \lambda - 2k + 1 \end{bmatrix} \right)^{k-1} \det \begin{bmatrix} \lambda - k + 1 & k-1 \\ k-1 & \lambda - k + 1 \end{bmatrix} \\ &= (\lambda^2 + (2-4k)\lambda + (4k^2 - 4k))^{k-1} (\lambda^2 + 2\lambda - 2k\lambda) \\ &= \lambda(\lambda - 2k)^{k-1} (\lambda - (2k-2))^k \end{aligned}$$

Teorema 5. Spektrum Laplacian dari graf *Cocktail Party* (CP_k) dengan $k \in \mathbb{N}, k > 1$ adalah

$$Spec_L CP_k = \left[\begin{array}{ccc} 2k & 2k-2 & 0 \\ k-1 & k & 1 \end{array} \right].$$

Bukti. Berdasarkan pada Lema 4 yang telah dipaparkan, diketahui bentuk umum polinomial karakteristik matriks Laplacian dari graf *Cocktail Party* (CP_k) dengan $k \in \mathbb{N}, k > 1$ adalah

$$p(CP_k, \lambda) = \lambda(\lambda - 2k)^{k-1} (\lambda - (2k-2))^k$$

yang diperoleh dari $\det(\lambda I - L(CP_k)) = 0$, maka diperoleh nilai eigennya adalah $\underbrace{2k, 2k, \dots, 2k}_{k-1}, \underbrace{2k-2, 2k-2, \dots, 2k-2}_k, 0$. Jadi, terbukti bahwa nilai spektrum Laplacian dari graf *Cocktail Party* (CP_k) dengan $k \in \mathbb{N}, k > 1$ adalah

$$Spec_L(CP_k) = \left[\begin{array}{ccc} 2k & 2k-2 & 0 \\ k-1 & k & 1 \end{array} \right] \quad (1)$$

Akibat 6. Kompleksitas graf *Cocktail Party* (CP_k) dengan $k \in \mathbb{N}, k > 1$ adalah

$$\tau(CP_k) = (2k)^{k-2} (2k-2)^k$$

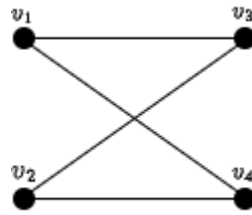
Bukti. Berdasarkan spektrum Laplacian yang telah diperoleh diketahui $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{2k} = 0$ sehingga diperoleh kompleksitas graf *Cocktail Party* dengan banyak simpul $2k$ ialah

$$\tau(CP_k) = \frac{1}{n} \prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i = \frac{1}{2k} \prod_{i=1}^{2k-1} \lambda_i = \frac{1}{2k} \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{2k-1}$$

dari Persamaan (1) diperoleh nilai $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2k-1}$ yaitu

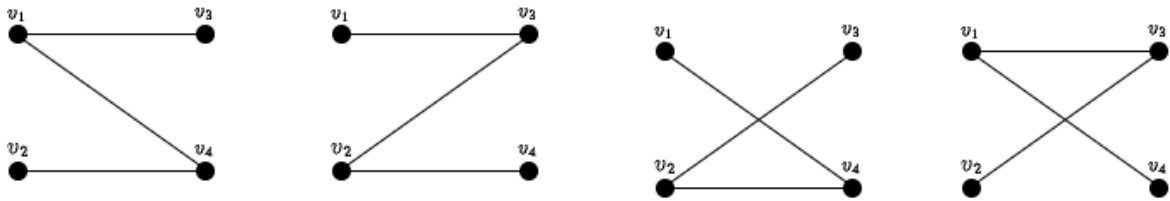
$$\tau(CP_k) = \frac{1}{2k} 2k \cdot 2k \cdot \dots \cdot 2k \cdot (2k-2) \cdot (2k-2) \cdot \dots \cdot (2k-2) = \frac{1}{2k} ((2k)^{k-1} (2k-2)^k) = (2k)^{k-2} (2k-2)^k. \blacksquare$$

Contoh 7. Diberikan graf CP_2 seperti pada Gambar 3



Gambar 3 Graf CP_2

Berdasarkan formula kompleksitas graf CP_k yang telah diperoleh dari Akibat 6 yaitu $\tau(CP_k) = (2k)^{k-2}(2k - 2)^k$, diperoleh kompleksitas graf CP_2 ialah $\tau(CP_2) = (2(2))^{2-2}(2(2) - 2)^2 = 4$. Berikut disajikan pohon perentang dari graf CP_2 pada Gambar 4.



Gambar 4 Pohon perentang graf CP_2

2. Spektrum Laplacian dan Kompleksitas Graf Sandat

Sebagaimana menentukan spektrum Laplacian dari graf *Cocktail Party*, spektrum Laplacian dari graf Sandat juga dapat ditentukan dengan menemukan polinomial karakteristik matriks Laplacian dari graf Sandat. Terlebih dahulu dikonstruksi matriks *adjacency* dan matriks *degree* untuk St_1 , St_2 dan St_3 , kemudian dibentuk matriks Laplacian dan dihitung polinomial karakteristiknya. Setelah itu, dibentuk polinomial karakteristik matriks Laplacian graf St_k . Tabel 2 berikut merupakan polinomial karakteristik matriks Laplacian dari graf Sandat.

Tabel 2 Polinomial karakteristik matriks Laplacian graf St_k

Graf Sandat (St_k)	Polinomial karakteristik matriks Laplacian
St_1	$\lambda(\lambda - 2)(\lambda - 4)^2$
St_2	$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2(\lambda - 4)^2(\lambda - 7)$
St_3	$\lambda(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^3(\lambda - 4)^3(\lambda - 10)$
$\vdots$	$\vdots$
St_k	$\lambda(\lambda - 1)^{k-1}(\lambda - 2)^k(\lambda - 4)^k(\lambda - (3k + 1))$

Berdasarkan Tabel 2, secara umum polinomial karakteristik matriks Laplacian dari graf Sandat, dapat ditentukan sebagaimana dalam Lema 8 berikut.

Lema 8. Polinomial karakteristik matriks Laplacian pada graf Sandat (St_k) adalah

$$p(St_k, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{k-1}(\lambda - 2)^k(\lambda - 4)^k(\lambda - (3k + 1))$$

Bukti. Matriks Laplacian dari graf Sandat adalah $L(St_k) = D(St_k) - A(St_k)$ dengan $A(St_k)$ adalah matriks ketetanggaan graf Sandat dan $D(St_k)$ adalah matriks diagonal dengan elemen-elemen diagonalnya merupakan derajat dari setiap simpul di graf Sandat. Matriks Laplacian dari graf Sandat dapat dikonstruksi sebagai

$$\begin{bmatrix} 3k & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}_{(3k+1) \times (3k+1)}$$

Polinomial karakteristik dari matriks Laplacian $L(St_k)$ adalah $p(St_k, \lambda) = \det(\lambda I - L(St_k))$. Akar-akar karakteristik diperoleh dari menyelesaikan persamaan karakteristik $p(St_k, \lambda) = 0$. Selanjutnya, untuk memperoleh akar-akar karakteristik dari matriks $\lambda I - L(St_k)$, determinan dicari dengan menggunakan matriks blok.

$$\begin{bmatrix} \lambda - 3k & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda - 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \lambda - 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda - 3 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda - 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda - 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda - 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda - 2 \end{bmatrix}_{(3k+1) \times (3k+1)}$$

Dimisalkan pola matriks $(\lambda I - L(St_k))$ graf Sandat sebagai berikut

$$M_n = \begin{bmatrix} (A_{11})_{1 \times 1} & (A_{12})_{1 \times 3} & (A_{13})_{b_1 \times b_3} & \cdots & (A_{1n})_{b_1 \times b_n} \\ (A_{21})_{3 \times 1} & (A_{22})_{3 \times 3} & O_{3 \times 3} & \cdots & O_{3 \times 3} \\ (A_{31})_{3 \times 1} & O_{3 \times 3} & (A_{33})_{3 \times 3} & \cdots & O_{3 \times 3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (A_{n1})_{3 \times 1} & O_{3 \times 3} & O_{3 \times 3} & \cdots & (A_{nn})_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

dengan

$$A_{11} = [\lambda - 3k]$$

$$A_{1i} = [1 \quad 1 \quad 1], \text{ dengan } i > 1, i \in \mathbb{N}$$

$$A_{i1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ dengan } i > 1, i \in \mathbb{N}$$

$$A_{ii} = \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda - 3 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda - 2 \end{bmatrix}, \text{ dengan } i > 1, i \in \mathbb{N}$$

Maka

$$A_{1i} A_{ii}^{-1} A_{i1} = [1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} \frac{\lambda^2 - 5\lambda + 5}{\lambda^3 - 7\lambda^2 + 14\lambda - 8} & -\frac{1}{\lambda^2 - 5\lambda + 4} & \frac{1}{\lambda^3 - 7\lambda^2 + 14\lambda - 8} \\ -\frac{1}{\lambda^2 - 5\lambda + 4} & \frac{1}{\lambda^2 - 5\lambda + 4} & -\frac{1}{\lambda^2 - 5\lambda + 4} \\ \frac{1}{\lambda^3 - 7\lambda^2 + 14\lambda - 8} & -\frac{1}{\lambda^2 - 5\lambda + 4} & \frac{\lambda^2 - 5\lambda + 5}{\lambda^3 - 7\lambda^2 + 14\lambda - 8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ \lambda - 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{11} - \sum_{i=2}^n A_{1i} A_{ii}^{-1} A_{i1} = [\lambda - 3k] - \sum_{i=2}^n \left[\frac{3}{\lambda - 1} \right] = [\lambda - 3k] - \left[\frac{3k}{\lambda - 1} \right] = \left[\lambda - 3k - \frac{3k}{\lambda - 1} \right]$$

Sehingga, determinan M_n dapat dihitung dengan rumus berikut

$$\det(M_n) = \det(A_{11} - \sum_{i=2}^n A_{1i} A_{ii}^{-1} A_{i1}) \prod_{j=2}^n \det(A_{jj})$$

$$\begin{aligned}
 &= \det \left[\lambda - 3k - \frac{3k}{\lambda-1} \right] \prod_{j=2}^k \det \begin{bmatrix} \lambda-2 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda-3 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-2 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{\lambda^2-3k\lambda-\lambda}{\lambda-1} (\lambda-1)^k (\lambda-2)^k (\lambda-4)^k \\
 &= \lambda (\lambda-1)^{k-1} (\lambda-2)^k (\lambda-4)^k (\lambda-(3k+1))
 \end{aligned}$$

Teorema 9. Spektrum Laplacian dari graf Sandat (St_k) dengan $k \in \mathbb{N}$ adalah

$$Spec_L(St_k) = \left[\begin{matrix} 3k+1 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & k & k & k-1 & 1 \end{matrix} \right].$$

Bukti. Berdasarkan pada Lema.8 yang telah dipaparkan, diketahui bentuk umum polinomial karakteristik matriks Laplacian dari graf Sandat (St_k) dengan $k \in \mathbb{N}$ adalah

$$p(St_k, \lambda) = \lambda(\lambda-1)^{k-1}(\lambda-2)^k(\lambda-4)^k(\lambda-(3k+1))$$

yang diperoleh dari $\det(\lambda I - L(St_k)) = 0$, maka diperoleh nilai eigennya adalah $3k+1, \underbrace{4, 4, \dots, 4}_k, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_k, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k-1}, 0$. Jadi, terbukti bahwa nilai spektrum Laplacian dari graf Sandat (St_k) dengan $k \in \mathbb{N}$ adalah

$$Spec_L(St_k) = \left[\begin{matrix} 3k+1 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & k & k & k-1 & 1 \end{matrix} \right]. \quad (2)$$

Akibat 10. Kompleksitas graf Sandat (St_k) dengan $k \geq 1$ adalah

$$\tau(St_k) = 2^{3k}$$

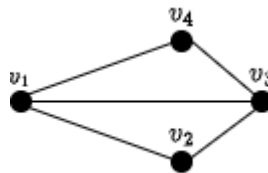
Bukti. Berdasarkan spektrum Laplacian yang telah diperoleh diketahui $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{3k+1} = 0$ sehingga diperoleh kompleksitas graf Sandat St_k dengan banyak simpul $3k+1$ ialah

$$\tau(St_k) = \frac{1}{n} \prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i = \frac{1}{3k+1} \prod_{i=1}^{3k} \lambda_i = \frac{1}{3k+1} \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{3k}$$

dari Persamaan (2) diperoleh nilai $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{3k}$ yaitu

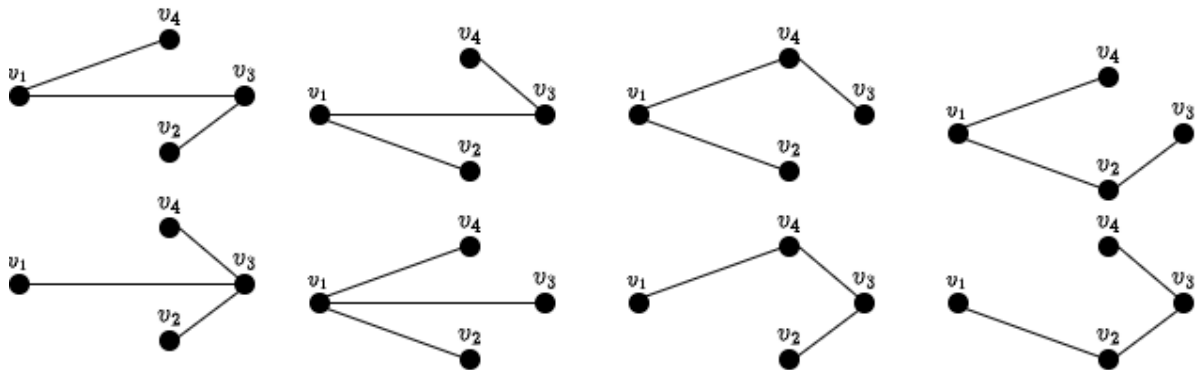
$$\tau(St_k) = \frac{1}{3k+1} (3k+1) \cdot 4 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 = \frac{1}{3k+1} ((3k+1)(4)^k(2)^k(1)^{k-1}) = 2^{3k} \quad \blacksquare$$

Contoh 11. Diberikan graf St_1 seperti pada Gambar 5



Gambar 5 Graf St_1

Berdasarkan formula kompleksitas graf St_k yang telah diperoleh dari Akibat 10 yaitu $\tau(St_k) = 2^{3k}$, diperoleh kompleksitas graf St_1 ialah $\tau(St_1) = 2^{3(1)} = 8$. Berikut disajikan pohon perentang dari graf St_1 pada Gambar 6.



Gambar 6 Pohon perentang graf St_1

SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah dipaparkan, diperoleh spektrum Laplacian dari graf *Cocktail Party* (CP_k) dan graf Sandat (St_k) masing-masing ialah $Spec_L(CP_k) = \begin{bmatrix} 2k & 2k-2 & 0 \\ k-1 & k & 1 \end{bmatrix}$ dan $Spec_L(St_k) = \begin{bmatrix} 3k+1 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & k & k & k-1 & 1 \end{bmatrix}$. Kompleksitas dari graf *Cocktail Party* (CP_k) dan graf Sandat (St_k) masing-masing dapat dihitung dengan formula $\tau(CP_k) = (2k)^{k-2}(2k-2)^k$ dan $\tau(St_k) = 2^{3k}$.

DAFTAR PUSTAKA

- Agustina, Y., Kusumastuti, N., & Fran, F. (2022). Spektrum Adjacency dari Graf Bintang, Graf Mahkota, dan Graf Tangga. *Bimaster: Buletin Ilmiah Matematika, Statistika dan Terapannya*, 11(2).
- Aksoy, S. G., Purvine, E., Cotilla-Sanchez, E., & Halappanavar, M. (2019). A generative graph model for electrical infrastructure networks. *Journal of Complex Networks*, 7(1), 128–162.
- Amaliyanah, M., Nurshiami, S. R., & Triyani, T. (2022). Spektrum Laplace pada Graf Kincir Angin Berarah. *Majalah Ilmiah Matematika dan Statistika*, 22(2), 131–144.
- Biggs, N. (1993). *Algebraic Graph Theory* (Second). Cambridge University Press.
- Brown, T. J., Mallion, R. B., Pollak, P., & Roth, A. (1996). Some methods for counting the spanning trees in labelled molecular graphs, examined in relation to certain fullerenes. *Discrete Applied Mathematics*, 67(1–3), 51–66.
- Deen, M. R. Z. E., Aboamer, W. A., & El-Sherbiny, H. M. (2023). The complexity of the super subdivision of cycle-related graphs using block matrices. *Computation*, 11(8), 162.
- Fikadila, L., Kusumastuti, N., & Pasaribu, M. (2024). Penentuan Banyaknya Pohon Perentang Menggunakan Teorema Pohon Matriks. *Bimaster: Buletin Ilmiah Matematika, Statistika dan Terapannya*, 13(2).
- Forrow, A., Woodhouse, F. G., & Dunkel, J. (2018). Functional control of network dynamics using designed Laplacian spectra. *Physical Review X*, 8(4), 041043.
- Fran, F., Yundari, Hanssen, C., & Nurliantika. (2025). The complexity of triangular book graph, butterfly graph, Lintang graph, and cycle books graph. *AIP Conference Proceedings*, 3142(1), 020088.
- Fran, F., Yundari, Romanda, P., Alexander, & Febyolga, E. (2024). The complexity of octopus graph, friendship graph, and snail graph. *EduMatSains: Jurnal Pendidikan, Matematika dan Sains*, 9(1), 84–101.
- Hanssen, C., Fran, F., & Yundari, Y. (2024). The complexity of pencil graph and line pencil graph. *PYTHAGORAS Jurnal Pendidikan Matematika*, 19(2).
- Hetmaniok, E., Rózański, M., Słota, D., Szveda, M., Trawiński, T., & Witula, R. (2017). Determinants of the block arrowhead matrices. *Selected Problems on Experimental Mathematics*, 73–88.
- Kempton, L., Herrmann, G., & Di Bernardo, M. (2017). Distributed optimisation and control of graph Laplacian eigenvalues for robust consensus via an adaptive multilayer strategy. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 27(9), 1499–1525.
- Khattabi, N. E., Yakoubi, F., Sahbani, H., & Marraki, M. E. (2019). Computing the number of spanning trees in the Wheel multiple graph. *International Journal of Advanced Trends in Computer Science and Engineering*, 8(4), 1296–1299.
- Miftahudi, A., & Kusmayadi, T. A. (2020). Dimensi K-Metrik pada Graf Cocktail Pesta, Graf Banana Tree, dan Graf Lintasan Korona Lintasan. *Peran Matematika dan Pendidikan Matematika dalam Menyongsong Era Disrupsi*, 287.

- Nurliantika, N., Fran, F., & Yundari, Y. (2025). Determinants of tridiagonal and circulant matrices special form by chebyshev polynomials. *JTAM (Jurnal Teori dan Aplikasi Matematika)*, 9(1), 190–205.
- Peranginangin, A. P. (2024). Analysis of graph theory in transport network optimisation: A mathematical approach and Its applications. *Jurnal Educatio FKIP UNMA*, 10(4).
- Rahmawati, N. D. (2016). Teorema Pohon Matriks Untuk Menentukan Banyaknya Pohon Rentangan Graf Bipartisi Komplit (K_m, n) . *FOKUS Jurnal Kajian Keislaman dan Kemasyarakatan*, 1(1), 87–100.
- Retnoningsih, I. I., Dafik, & Saddam Hussien. (2022). Pewarnaan Titik pada Keluarga Graf Sentripetal. *CGANT Journal of Mathematics and Applications*, 3(1).
- Triyani, T., Oktriyansa, R., & Nurshiami, S. R. (2024). Spektrum Laplace Graf Mahkota dan Graf Benteng. *PYTHAGORAS Jurnal Pendidikan Matematika*, 19(1).
- Ubaidillah, N., & Abrori, M. (2014). *Pengujian Optimalisasi Jaringan Kabel Fiber Optic di Universitas Islam Indonesia Menggunakan Minimum Spanning Tree* [Skripsi]. Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga.
- Umam, K. (2019). Spectrum dan Spectrum Laplacian pada Graf Mahkota. *KALBISCIENTIA Jurnal Sains dan Teknologi*, 6(2), 161–161.