

Pelabelan Sisi Prima Ganjil pada Beberapa Kelas Graf

Hafif Komarullah^{1*} , M. Adi Cahyono² , Zulfi Jummala Khilda Maulidi³

^{1,2,3} Department of Mathematics Education, Universitas Al Falah As Sunniah, Indonesia

* Corresponding Author. E-mail: hafififa4@gmail.com

ARTICLE INFO

Article History:

Received: 18-Jan. 2025

Revised: 02-Jun. 2025

Accepted: 10-Jul.2025

Keywords:

Pelabelan prima, pelabelan prima ganjil, pelabelan sisi relatif prima, pelabelan sisi prima ganjil.

ABSTRACT

Penelitian ini bertujuan untuk mengenalkan konsep pelabelan sisi prima ganjil pada graf. Misalkan G adalah graf terhubung sederhana, pelabelan sisi prima ganjil pada graf G adalah fungsi bijektif $f: E(G) \rightarrow \{1, 3, \dots, 2|E(G)| - 1\}$ sedemikian sehingga setiap sisi yang bersisian dengan titik $v \in V(G)$ memiliki label relatif prima. Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah deskriptif aksiomatik dan pendeteksian pola. Peneliti membuktikan bahwa graf lintasan, graf siklus, graf centipede, graf sisir, graf pohon Y , dan graf ulat teratur adalah graf sisi prima ganjil. Dalam penelitian ini juga didapatkan bahwa tidak semua graf dapat dilabeli dengan pelabelan sisi prima ganjil, seperti graf bintang S_n dengan $n \geq 5$. Penelitian ini diharapkan dapat menambah literatur terutama pada konsep pelabelan graf.

This research aims to introduce the concept of odd prime edge labelling on graphs. Let G be a simple connected graph, odd prime edge labelling on graph G is a bijective function $f: E(G) \rightarrow \{1, 3, \dots, 2|E(G)| - 1\}$ such that every edge adjacent to a vertex $v \in V(G)$ has a relatively prime label. The research methods used in this study are axiomatic descriptive and pattern detection. We prove that path graphs, cycle graphs, centipede graphs, comb graphs, Y-tree graphs, regular caterpillar graphs are odd prime edge graphs. This research also found that not all graphs can be labelled with odd prime edge labelling, such as the star graph S_n with $n \geq 5$. This research is expected to add to the literature, especially on the concept of graph labelling.

This is an open access article under the [CC-BY-SA](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/) license



How to Cite:

Komarullah, H., Cahyono, M. A., & Maulidi, Z. J. K. (2025). Pelabelan Sisi Prima Ganjil pada Beberapa Kelas Graf. *PYTHAGORAS Jurnal Matematika Dan Pendidikan Matematika*, 20(1). <https://doi.org/10.21831/pythagoras.v20i1.82642>

<https://doi.org/10.21831/pythagoras.v20i1.82642>

PENDAHULUAN

Teori graf adalah cabang ilmu matematika yang memiliki berbagai aplikasi dalam memecahkan permasalahan dalam kehidupan sehari-hari. Dalam aplikasinya, teori graf menggunakan titik sebagai representasi objek dan sisi sebagai representasi antar objek (Mahmudah, 2022). Secara matematis graf biasanya dinotasikan $G(V(G), E(G))$ yaitu pasangan himpunan tak kosong $V(G)$ yang disebut dengan titik dan himpunan sisi $E(G)$ yang boleh kosong dari pasangan tak terurut titik-titik dalam $V(G)$ (Wallis, 2001). Leonhard Euler adalah orang pertama yang memecahkan permasalahan memanfaatkan teori graf. Permasalahan tersebut adalah teka-teki Jembatan Königsberg tentang kemungkinan seseorang melalui seluruh pulau dengan melewati tujuh jembatan tepat satu kali yang terdapat di sepanjang sungai. Leonhard Euler berpendapat bahwa tidak mungkin untuk melewati semua tujuh jembatan di kota tersebut tanpa melewati salah satu jembatan lebih dari sekali. Dalam memecahkan permasalahan tersebut, Euler mewakili daratan dengan titik dan jembatan dengan sisi (Chartrand, 1977). Topik dalam teori graf semakin berkembang hingga saat ini, salah satunya adalah topik pelabelan graf.

Pelabelan graf adalah pemetaan anggota-anggota graf (titik, sisi, ataupun keduanya) ke bilangan bulat dengan aturan-aturan tertentu (Komarullah, 2023). Pelabelan graf dibagi menjadi tiga macam berdasarkan domainnya yaitu pelabelan titik (domain berupa titik), pelabelan sisi (domain berupa sisi), dan pelabelan total (domain berupa titik dan sisi) (Julaeha dkk., 2017). Terdapat lebih dari 200 jenis pelabelan graf yang telah dikembangkan hingga saat ini (Komarullah dkk., 2022). Salah satu jenis pelabelan yang telah dikembangkan adalah pelabelan prima yang dikenalkan oleh Entringer dan dipopulerkan oleh Tout dkk. (1982).

Definisi 1. (Tout dkk., 1982, Pelabelan Prima)

Pelabelan prima pada graf G adalah fungsi bijektif $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, |V(G)|\}$ sedemikian sehingga titik yang bertetangga memiliki label relatif prima.

Definisi 2. (Rosen, 2011, Bilangan Relatif Prima)

Dua bilangan bulat a dan b dikatakan relatif prima apabila GCD (*Great Common Divisor*) kedua bilangan adalah 1.

Graf yang dapat dilabeli dengan pelabelan prima disebut graf prima. Peneliti sebelumnya telah banyak yang meneliti tentang pelabelan prima pada beberapa kelas graf. Tout dkk. (1982) menunjukkan bahwa graf ulat dengan derajat maksimum 5, graf $C_n \odot \bar{K}_n$, graf lintasan, dan graf bintang adalah graf prima. Graf $Amal(G, v_0, t)$ dengan G adalah siklus, lintasan, dan roda genap merupakan graf prima (Lee dkk., 1988). Fu & Huang (1994) menunjukkan bahwa graf pohon dengan order kurang dari 16 dan graf $P(n, k)$ dengan $k \leq 14$ adalah graf prima. Robertson & Small (2009) menunjukkan bahwa graf pohon palm, graf pohon binomial, dan graf pohon pisang adalah graf prima. Ganesan dkk. (2019) menunjukkan bahwa graf payung, graf ubur-ubur, graf H , graf $P_{a,b}$, dan graf LIC_n adalah graf prima. Hasil survei lengkap tentang pelabelan prima dapat dilihat pada Gallian (2022).

Peneliti lain juga mengembangkan pelabelan prima menjadi beberapa macam, salah satunya pelabelan koprima (Berliner dkk., 2016), pelabelan prima ganjil (Prajapati & Shah, 2018), pelabelan sisi relatif prima (Janani & Ramachandran, 2022), pelabelan sisi koprima (Janani & Ramachandran, 2023), dan pelabelan total koprima (Komarullah, 2024).

Definisi 3. (Prajapati & Shah, 2018, Pelabelan Prima Ganjil)

Pelabelan prima ganjil adalah fungsi bijektif $f: V(G) \rightarrow \{1, 3, \dots, 2|V(G)| - 1\}$ sedemikian sehingga label titik yang bertetangga relatif prima.

Definisi 4. (Janani & Ramachandran, 2022, Pelabelan Sisi Relatif Prima)

Pelabelan sisi relatif prima pada graf G adalah fungsi bijektif $f: E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |E(G)|\}$ sedemikian sehingga setiap sisi yang bersisian dengan titik $v \in V(G)$ memiliki label relatif prima.

Definisi 5. (Hora & Obata, 2007, Operasi *comb*).

Misalkan G dan H adalah graf terhubung dan $u \in V(H)$. Operasi *comb* dari graf G dan graf H dinotasikan dengan $G \triangleright H$ adalah graf yang dibentuk dengan mengambil satu salinan G dan $|G|$ salinan dari H selanjutnya melekatkan titik u dari masing-masing graf H salinan ke- i pada titik ke- i dari graf G .

Terinspirasi dari penelitian sebelumnya, maka dalam penelitian ini dikenalkan suatu konsep baru yaitu pelabelan sisi prima ganjil. Misalkan diberikan sebarang graf G , pelabelan sisi prima ganjil pada graf G adalah fungsi bijektif $f: E(G) \rightarrow \{1, 3, \dots, 2|E(G)| - 1\}$ sedemikian sehingga setiap sisi yang bersisian dengan titik $v \in V(G)$ memiliki label relatif prima. Graf yang dapat dilabeli dengan pelabelan sisi prima ganjil disebut graf sisi prima ganjil. Dalam penelitian ini, akan dibuktikan bahwa graf lintasan, graf siklus, graf *centipede*, graf sisir, graf pohon Y , dan graf ulat teratur adalah graf sisi prima ganjil. Penelitian ini diharapkan dapat menambah literatur terutama pada konsep pelabelan graf. Dalam membuktikan dua bilangan relatif prima, maka digunakan Lemma berikut.

Lemma 1. (Komarullah dkk., 2024)

Misalkan $a \equiv 1 \pmod{2}$. Jika bilangan bulat positif r tidak memiliki faktor ganjil selain satu, maka $\gcd(a, a + r) = 1$.

METODE

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah deskriptif aksiomatik dan pendeteksian pola. Studi pustaka dilakukan dengan menggali informasi dari tesis, disertasi, jurnal, buku ataupun sumber lain yang terpercaya terkait pelabelan prima dan perkembangannya. Metode deskriptif aksiomatik digunakan dengan cara menyajikan beberapa definisi, lemma atau teorema sebelumnya sebagai acuan untuk pembuktian teorema yang diperoleh dalam penelitian ini. Pendeteksian pola dilakukan untuk mendapatkan fungsi umum dari pelabelan sisi prima ganjil yang telah dilakukan pada sebarang graf G dengan order tertentu.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini dibahas tentang pelabelan sisi prima ganjil pada graf lintasan, graf siklus, graf *centipede*, graf sisir, graf pohon Y , dan graf ulat teratur.

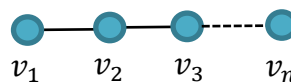
1. Graf lintasan

Graf lintasan dinotasikan dengan P_n adalah graf dengan barisan berselang-seling antara titik dan sisi yang berbentuk $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$ (Hartsfield & Ringel, 2003). Himpunan titik dan sisi pada graf lintasan adalah sebagai berikut.

$$V(P_n) = \{v_i; i = 1, 2, \dots, n\}$$

$$E(P_n) = \{v_i v_{i+1}; i = 1, 2, \dots, n-1\}$$

Ilustrasi dari penotasian titik dan sisi pada graf lintasan dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 1. Penotasian titik dan sisi pada graf lintasan P_n

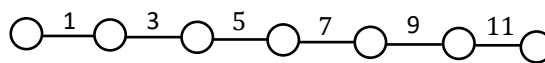
Teorema 1. Untuk setiap $n \geq 2$, graf lintasan (P_n) merupakan graf sisi prima ganjil.

Bukti. Graf lintasan memiliki n titik dan $n-1$ sisi. Untuk menunjukkan bahwa graf lintasan merupakan graf sisi prima ganjil yaitu dengan membangun fungsi yang memenuhi kaidah pelabelan sisi prima ganjil. Definisikan fungsi $f: E(P_n) \rightarrow \{1, 3, \dots, 2n-3\}$ sebagai berikut.

$$f(v_i v_{i+1}) = 2i - 1; i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Diketahui bahwa untuk $|f(v_i v_{i+1}) - f(v_{i+1} v_{i+2})| = 2$ dengan $i = 1, 2, \dots, n-2$. Karena 2 tidak memiliki faktor ganjil selain 1, maka berdasarkan Lemma 1 diperoleh bahwa $\gcd(f(v_i v_{i+1}), f(v_{i+1} v_{i+2})) = 1$ dengan $i = 1, 2, \dots, n-2$. Terbukti bahwa fungsi f memenuhi kaidah pelabelan sisi prima ganjil, sehingga graf lintasan adalah graf sisi prima ganjil. ■

Sebagai contoh dari Teorema 1 dapat dilihat pada Gambar 2.



Gambar 2. Pelabelan sisi prima ganjil pada graf lintasan P_7

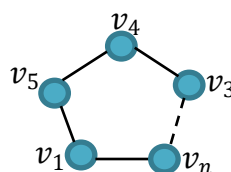
2. Graf siklus

Graf siklus dinotasikan dengan C_n untuk $n \geq 3$ adalah graf terhubung sederhana yang memiliki n titik dan n sisi, yang setiap titiknya berderajat dua (Rosen, 2003). Penotasian titik dan sisi pada graf siklus sebagai berikut.

$$V(C_n) = \{v_i; i = 1, 2, \dots, n\}$$

$$E(C_n) = \{v_i v_{i+1}; i = 1, 2, \dots, n-1\} \cup \{v_n v_1\}$$

Contoh penotasian titik dan sisi pada graf siklus dapat dilihat pada Gambar 3.



Gambar 3. Penotasian titik dan sisi pada graf siklus C_n

Teorema 2. Untuk setiap $n \geq 3$, graf siklus (C_n) merupakan graf sisi prima ganjil.

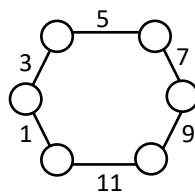
Bukti. Dengan cara yang sama, untuk menunjukkan bahwa graf siklus merupakan graf sisi prima ganjil yaitu dengan membangun fungsi yang memenuhi kaidah pelabelan sisi prima ganjil. Definisikan fungsi $f: E(C_n) \rightarrow \{1, 3, \dots, 2n-1\}$ sebagai berikut.

$$f(v_i v_{i+1}) = 2i - 1; i = 1, 2, \dots, n-1.$$

$$f(v_n v_1) = 2n - 1$$

Label sisi $v_1 v_2$ bernilai 1, sehingga relatif prima dengan label sisi $v_n v_1$. Diketahui bahwa untuk $|f(v_i v_{i+1}) - f(v_{i+1} v_{i+2})| = 2$ dengan $i = 1, 2, \dots, n-2$. Karena 2 tidak memiliki faktor ganjil selain 1, maka berdasarkan Lemma 1 diperoleh bahwa $\gcd(f(v_i v_{i+1}), f(v_{i+1} v_{i+2})) = 1$ dengan $i = 1, 2, \dots, n-2$. Terbukti bahwa fungsi f memenuhi kaidah pelabelan sisi prima ganjil, sehingga graf siklus adalah graf sisi prima ganjil. ■

Contoh pelabelan sisi prima ganjil pada graf siklus dapat dilihat pada Gambar 4.



Gambar 4. Pelabelan sisi prima ganjil pada graf siklus C_6

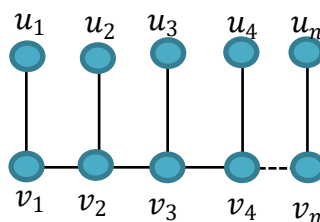
3. Graf centipede

Graf *centipede* dengan order $2n$ dinotasikan dengan n - *centipede* adalah graf yang isomorfis dengan $P_n \triangleright P_2$ (operasi *comb* P_n dan P_2). Graf n - *centipede* diperoleh dengan menduplikasi P_2 sebanyak n salinan dan kemudian menempelkan setiap duplikasi P_2 pada setiap titik di P_n . Penotasian titik dan sisi pada graf n - *centipede* sebagai berikut.

$$V(n - \text{centipede}) = \{v_i; i = 1, 2, \dots, n\} \cup \{u_i; i = 1, 2, \dots, n\}$$

$$E(n - \text{centipede}) = \{v_i v_{i+1}; i = 1, 2, \dots, n-1\} \cup \{u_i v_i; i = 1, 2, \dots, n\}$$

Contoh graf n - *centipede* dapat dilihat pada Gambar 5.



Gambar 5. Penotasian titik dan sisi pada graf n - *centipede*

Teorema 3. Untuk setiap $n \geq 3$, graf n - *centipede* merupakan graf sisi prima ganjil.

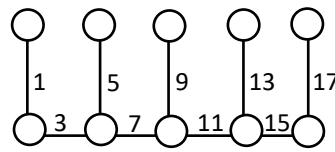
Bukti. Dengan cara yang sama, untuk menunjukkan bahwa graf n - *centipede* merupakan graf sisi prima ganjil yaitu dengan membangun fungsi yang memenuhi kaidah pelabelan sisi prima ganjil. Definisikan fungsi $f: E(n - \text{centipede}) \rightarrow \{1, 3, \dots, 4n-3\}$ sebagai berikut.

$$f(u_i v_i) = 4i - 3; i = 1, 2, \dots, n.$$

$$f(v_i v_{i+1}) = 4i - 1; i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Diketahui bahwa $|f(u_i v_i) - f(v_i v_{i+1})| = 2$ dengan $i = 1, 2, \dots, n-1$. Karena 2 tidak memiliki faktor ganjil selain 1, maka berdasarkan Lemma 1 diperoleh bahwa $\gcd(f(u_i v_i), f(v_i v_{i+1})) = 1$ $i = 1, 2, \dots, n-1$. Diketahui $|f(v_i v_{i+1}) - f(v_{i+1} v_{i+2})| = 4$ dengan $i = 1, 2, \dots, n-2$. Bilangan 4 tidak memiliki faktor ganjil selain 1, sehingga berdasarkan Lemma 1 diperoleh bahwa $\gcd(f(v_i v_{i+1}), f(v_{i+1} v_{i+2})) = 1$ dengan $i = 1, 2, \dots, n-1$. Terbukti bahwa fungsi f memenuhi kaidah pelabelan sisi prima ganjil, sehingga graf n - *centipede* adalah graf sisi prima ganjil. ■

Contoh pelabelan sisi prima ganjil pada graf 5 - *centipede* dapat dilihat pada Gambar 6.



Gambar 6. Pelabelan sisi prima ganjil pada graf 5 – centipede

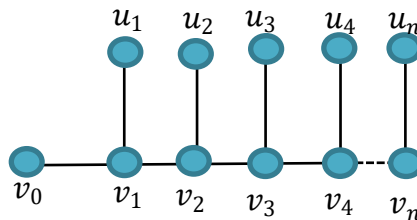
4. Graf sisir

Graf sisir dengan $2n + 1$ dinotasikan dengan Cb_n merupakan graf yang isomorfis dengan graf hasil operasi identifikasi titik graf lintasan P_2 dan graf n – centipede dengan menempelkan salah satu titik P_2 ke salah satu titik berderajat dua (titik v_1 atau titik v_n) pada graf n – centipede. Penotasian titik dan sisi pada graf sisir adalah sebagai berikut.

$$V(Cb_n) = \{v_0\} \cup \{v_i; i = 1, 2, \dots, n\} \cup \{u_i; i = 1, 2, \dots, n\}$$

$$E(Cb_n) = \{v_i v_{i+1}; i = 0, 1, \dots, n - 1\} \cup \{u_i v_i; i = 1, 2, \dots, n\}$$

Contoh graf sisir Cb_n dapat dilihat pada Gambar 7.



Gambar 7. Penotasian titik dan sisi pada graf sisir Cb_n

Teorema 4. Untuk setiap $n \geq 3$, graf sisir Cb_n merupakan graf sisi prima ganjil.

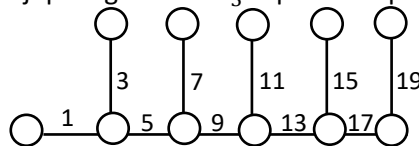
Bukti. Akan ditunjukkan bahwa graf sisir Cb_n merupakan graf sisi prima ganjil yaitu dengan membangun fungsi yang memenuhi kaidah pelabelan sisi prima ganjil. Definisikan fungsi $f: E(Cb_n) \rightarrow \{1, 3, \dots, 4n - 1\}$ sebagai berikut.

$$f(u_i v_i) = 4i - 1; i = 1, 2, \dots, n.$$

$$f(v_i v_{i+1}) = 4i + 1; i = 0, 1, \dots, n - 1.$$

Dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa fungsi f memenuhi kaidah pelabelan sisi prima ganjil, sehingga graf sisir Cb_n adalah graf sisi prima ganjil. ■

Contoh pelabelan sisi prima ganjil pada graf sisir Cb_5 dapat dilihat pada Gambar 8.



Gambar 8. Pelabelan sisi prima ganjil pada graf sisir Cb_5

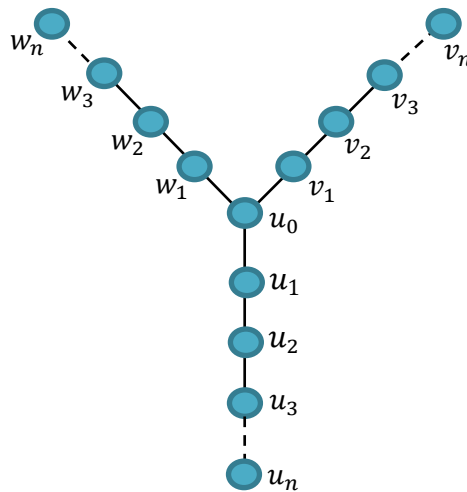
5. Graf pohon Y

Graf pohon Y berorder $3n + 1$ dinotasikan dengan $Y(P_n^3)$ merupakan graf yang dibangun dari menduplikasi graf lintasan P_{n+1} dan menempelkan setiap titik ujungnya menjadi satu. Penotasian titik dan sisi pada graf pohon Y sebagai berikut.

$$V(Y(P_n^3)) = \{u_i; i = 1, 2, \dots, n\} \cup \{v_j; j = 1, 2, \dots, n\} \cup \{w_k; k = 1, 2, \dots, n\}$$

$$E(Y(P_n^3)) = \{u_i u_{i+1}; i = 0, 1, \dots, n - 1\} \cup \{u_0 v_1, v_j v_{j+1}; j = 1, 2, \dots, n - 1\} \cup \{u_0 w_1, w_k w_{k+1}; k = 1, 2, \dots, n - 1\}$$

Ilustrasi penotasian titik dan sisi pada graf pohon $Y(P_n^3)$ dapat dilihat pada Gambar 9.

Gambar 9. Penotasian titik dan sisi pada graf pohon $Y(P_n^3)$

Teorema 5. Untuk setiap $n \geq 2$, graf pohon $Y(P_n^3)$ merupakan graf sisi prima ganjil.

Bukti. Akan ditunjukkan bahwa graf pohon $Y(P_n^3)$ merupakan graf sisi prima ganjil yaitu dengan membangun fungsi yang memenuhi kaidah pelabelan sisi prima ganjil. Definisikan fungsi $f: E(Y(P_n^3)) \rightarrow \{1, 3, \dots, 6n - 1\}$ sebagai berikut.

$$f(u_i u_{i+1}) = 2i + 1; i = 0, 1, \dots, n - 1.$$

$$f(u_0 w_1) = 4n - 1.$$

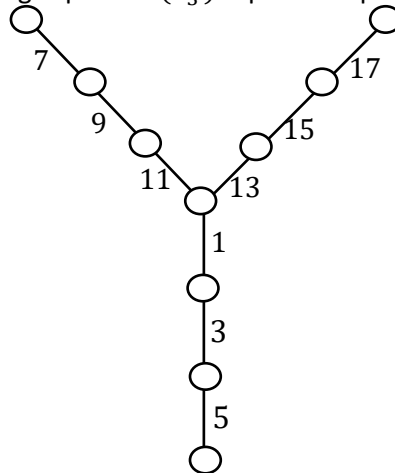
$$f(w_k w_{k+1}) = 4n - 2k - 1; k = 1, 2, \dots, n - 1.$$

$$f(u_0 v_1) = 4n + 1.$$

$$f(v_j v_{j+1}) = 4n + 1 + 2j; j = 1, 2, \dots, n - 1.$$

Dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa fungsi f memenuhi kaidah pelabelan sisi prima ganjil, sehingga graf pohon $Y(P_n^3)$ adalah graf sisi prima ganjil. ■

Contoh pelabelan sisi prima ganjil pada graf pohon $Y(P_3^3)$ dapat dilihat pada Gambar 10.

Gambar 10. Pelabelan sisi prima ganjil pada graf pohon $Y(P_3^3)$

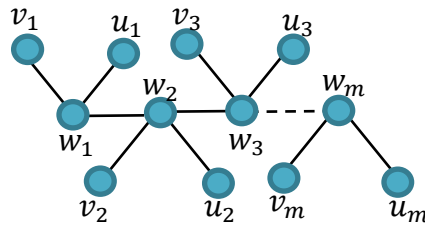
6. Graf ulat teratur

Graf ulat teratur $C_{m,n}$ berorder $mn + m$ adalah graf yang dibangun dari hasil operasi *comb* graf lintasan dan graf bintang ($P_m \triangleright S_n$) dengan menempelkan titik berderajat n dari setiap salinan graf bintang S_n pada setiap titik pada graf lintasan P_m (Harary, 1994). Dalam penelitian ini dibahas tentang pelabelan sisi prima ganjil pada graf ulat teratur $C_{m,2}$. Penotasian titik dan sisi pada graf ulat teratur $C_{m,2}$ adalah sebagai berikut.

$$V(C_{m,2}) = \{w_i; i = 1, 2, \dots, m\} \cup \{u_i; i = 1, 2, \dots, m\} \cup \{v_i; i = 1, 2, \dots, m\}$$

$$E(C_{m,2}) = \{w_i w_{i+1}; i = 1, 2, \dots, m - 1\} \cup \{w_i v_i, w_i u_i; i = 1, 2, \dots, m\}$$

Contoh penotasian titik dan sisi pada graf ulat teratur $C_{m,2}$ dapat dilihat pada Gambar 11.



Gambar 11. Penotasian titik dan sisi pada graf ulat teratur $C_{m,2}$

Teorema 6. Untuk setiap $m \geq 2$, graf ulat teratur $C_{m,2}$ merupakan graf sisi prima ganjil.

Bukti. Dengan cara yang sama untuk menunjukkan bahwa graf ulat teratur $C_{m,2}$ merupakan graf sisi prima ganjil yaitu dengan membangun fungsi yang memenuhi kaidah pelabelan sisi prima ganjil. Definisikan fungsi $f: E(C_{m,n}) \rightarrow \{1, 3, \dots, 6m - 3\}$ sebagai berikut.

$$f(v_i w_i) = 6i - 5; i = 1, 2, \dots, m.$$

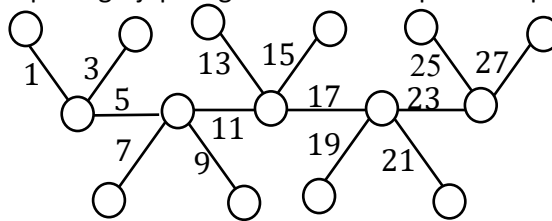
$$f(u_i w_i) = 6i - 3; i = 1, 2, \dots, m.$$

$$f(w_i w_{i+1}) = 6i - 1; i = 1, 2, \dots, m - 1.$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa setiap sisi yang bersisian dengan titik yang sama memiliki label relatif prima. Hal tersebut akan ditunjukkan sebagai berikut.

- Label sisi $v_i w_i$ dan label sisi $u_i w_i$
Diketahui bahwa $|f(v_i w_i) - f(u_i w_i)| = |(6i - 5) - (6i - 3)| = 2$ dengan $i = 1, 2, \dots, m$. Karena 2 tidak memiliki faktor ganjil selain 1, maka berdasarkan Lemma 1 $\gcd(f(v_i w_i), f(u_i w_i)) = 1$ dengan $i = 1, 2, \dots, m$. Terbukti bahwa sisi $v_i w_i$ dan sisi $u_i w_i$ memiliki label yang relatif prima.
- Label sisi $v_i w_i$ dan label sisi $w_i w_{i+1}$
Diketahui bahwa $|f(v_i w_i) - f(w_i w_{i+1})| = |(6i - 5) - (6i - 1)| = 4$ dengan $i = 1, 2, \dots, m - 1$. Karena 4 tidak memiliki faktor ganjil selain 1, maka berdasarkan Lemma 1 $\gcd(f(v_i w_i), f(w_i w_{i+1})) = 1$ dengan $i = 1, 2, \dots, m - 1$. Terbukti bahwa sisi $v_i w_i$ dan sisi $w_i w_{i+1}$ memiliki label yang relatif prima.
- Label sisi $u_i w_i$ dan label sisi $w_i w_{i+1}$
Diketahui bahwa $|f(u_i w_i) - f(w_i w_{i+1})| = |(6i - 3) - (6i - 1)| = 2$ dengan $i = 1, 2, \dots, m - 1$. Karena 2 tidak memiliki faktor ganjil selain 1, maka berdasarkan Lemma 1 $\gcd(f(u_i w_i), f(w_i w_{i+1})) = 1$ dengan $i = 1, 2, \dots, m - 1$. Terbukti bahwa sisi $u_i w_i$ dan sisi $w_i w_{i+1}$ memiliki label yang relatif prima.
- Label sisi $w_i w_{i+1}$ dan label sisi $w_{i+1} w_{i+2}$
Misalkan $\gcd(f(w_i w_{i+1}), f(w_{i+1} w_{i+2})) = \gcd((6i - 1), (6i + 5)) = k$ dengan $i = 1, 2, \dots, m - 1$. Diketahui bahwa $f(w_i w_{i+1}) \equiv 1 \pmod 3$ dan $f(w_{i+1} w_{i+2}) \equiv 1 \pmod 3$, sehingga $k \neq 3$. Misalkan $6i - 1 = kx$ dan $6i + 5 = ky$, maka $k(y - x) = 6$. Karena $f(w_i w_{i+1})$ dan $f(w_{i+1} w_{i+2})$ bernilai ganjil, maka harus ganjil. Bilangan 6 memiliki faktor ganjil 1 dan 3. Karena $k \neq 3$, maka $k = 1$. Terbukti $\gcd(f(w_i w_{i+1}), f(w_{i+1} w_{i+2})) = 1$ dengan $i = 1, 2, \dots, m - 1$.
- Label sisi $w_i w_{i+1}$ dan label sisi $w_{i+1} v_{i+1}$
Diketahui bahwa $|f(w_i w_{i+1}) - f(w_{i+1} v_{i+1})| = |(6i - 1) - (6i + 1)| = 2$ dengan $i = 1, 2, \dots, m - 1$. Karena 2 tidak memiliki faktor ganjil selain 1, maka berdasarkan Lemma 1 $\gcd(f(w_i w_{i+1}), f(w_{i+1} v_{i+1})) = 1$ dengan $i = 1, 2, \dots, m - 1$. Terbukti bahwa sisi $w_i w_{i+1}$ dan sisi $w_{i+1} v_{i+1}$ memiliki label yang relatif prima.
- Label sisi $w_i w_{i+1}$ dan label sisi $w_{i+1} u_{i+1}$
Diketahui bahwa $|f(w_i w_{i+1}) - f(w_{i+1} u_{i+1})| = |(6i - 1) - (6i + 3)| = 4$ dengan $i = 1, 2, \dots, m - 1$. Karena 4 tidak memiliki faktor ganjil selain 1, maka berdasarkan Lemma 1 $\gcd(f(w_i w_{i+1}), f(w_{i+1} u_{i+1})) = 1$ dengan $i = 1, 2, \dots, m - 1$. Terbukti bahwa sisi $w_i w_{i+1}$ dan sisi $w_{i+1} u_{i+1}$ memiliki label yang relatif prima.

Berdasarkan uraian diatas, dapat ditunjukkan bahwa label setiap sisi yang bersisian dengan titik yang sama memiliki label relatif prima. Terbukti bahwa graf ulat teratur $C_{m,2}$ adalah graf sisi prima ganjil. ■
Sebagai contoh dari pelabelan sisi prima ganjil pada graf ulat teratur dapat dilihat pada Gambar 12.



Gambar 12. Pelabelan sisi prima ganjil pada graf ulat teratur $C_{5,2}$

Dalam penelitian ini penulis belum mendapatkan fungsi pelabelan sisi prima ganjil secara umum untuk nilai $n > 2$ pada graf ulat teratur $C_{m,n}$.

Masalah Terbuka 1. Tentukan pelabelan sisi prima ganjil pada graf ulat teratur $C_{m,n}$ untuk $n > 2$.

Dalam topik pelabelan sisi prima ganjil, tidak semua graf dapat dilabeli dengan pelabelan sisi prima ganjil seperti graf bintang S_n dengan order $n + 1$ dan $n \geq 5$. Sebagai contoh untuk graf bintang S_5 memiliki ukuran 5 dan setiap sisinya bersisian dengan titik yang sama. Berdasarkan kaidah pelabelan sisi prima ganjil, label yang dapat digunakan adalah $\{1, 3, 5, 7, 9\}$. Jelas bahwa label 3 dan label 9 tidak relatif prima. Akibatnya, graf bintang S_5 tidak dapat dilabeli dengan kaidah pelabelan sisi prima ganjil.

SIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa graf lintasan, graf siklus, graf *centipede*, graf sisir, graf pohon Y, dan graf ulat teratur adalah graf sisi prima ganjil. Dalam penelitian ini pada graf ulat teratur hanya dibahas tentang pelabelan sisi prima ganjil pada graf $C_{m,2}$. Dalam penelitian ini juga didapatkan bahwa tidak semua graf dapat dilabeli dengan pelabelan sisi prima ganjil, seperti graf bintang S_n dengan $n \geq 5$. Peneliti lain dapat melanjutkan pelabelan sisi prima ganjil pada graf ulat teratur $C_{m,n}$ atau kelas graf lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

- Berliner, A. H., Dean, N., Hook, J., Marr, A., Mbirika, A., & McBee, C. D. (2016). Coprime and prime labelings of graphs. *arXiv preprint arXiv:1604.07698*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1604.07698>
- Chartrand, G. (1977). *Introductory Graph Theory*. Dover, New York.
- Fu, H. L., & Huang, K. C. (1994). On prime labellings. *Discrete Mathematics*, 127(1-3), 181-186. [https://doi.org/10.1016/0012-365X\(92\)00477-9](https://doi.org/10.1016/0012-365X(92)00477-9)
- Gallian, J. A. (2022). A Dynamic Survey of Graph Labeling. *Electronic Journal of Combinatorics*, 6(25), 4-623. Article DS6. <https://doi.org/10.37236/11668>
- Ganesan, R., A Bhaalamurugan, C., & Bhaalamurugan, A. (2019). Prime Labeling For Some New Classes Of Graphs. *IJRAR-International Journal of Research and Analytical Reviews (IJRAR)*, 6(2), 232-235.
- Harary, F. (1994). *Graph Theory*. Michigan: Addison-Wesley Publishing Company. Boston
- Hartsfield, N., & Ringel, G. (2003). *Pearls in Graph Theory: A Comprehensive Introduction*. Dover Publication, Inc. New York.
- Hora, A., & Obata, N. (2007). *Quantum Probability and Spectral Analysis of Graphs*. Springer Science & Business Media. Berlin.
- Janani, R., & Ramachandran, T. (2022). On Relatively Prime Edge Labeling of Graphs. *Engineering Letters*, 30(2), 659-665.

- Janani, R., & Ramachandran, T. (2023). Coprime Edge Labeling of Graphs. SSRN. 1-11. <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.4486269>
- Julaeha, S., Luspitasari, I., & Sukaesih, E. (2017). Pelabelan Total Tak Teratur Total pada Graf Bunga. *Jurnal Istek*, 10(1), 83-101. <https://journal.uinsgd.ac.id/index.php/istek/article/view/1458>
- Komarullah, H. (2023, December). Nilai Minimum Span pada Graf Gurita, Graf Siput, dan Graf Ubur-Ubur. In *Prosiding Galuh Mathematics National Conference* (Vol. 3, No. 1, pp. 56-62). <https://jurnal.unigal.ac.id/GAMMA-NC/article/view/12952/6999>
- Komarullah, H. (2024, March). Pelabelan Total Koprime. In *Prosiding Seminar Pendidikan Matematika dan Matematika* (Vol. 9). <https://doi.org/10.21831/pspmm.v9i1.329>
- Komarullah, H., Halikin, I., & Santoso, K. A. (2022, February). On the minimum span of cone, tadpole, and barbell graphs. In *International Conference on Mathematics, Geometry, Statistics, and Computation (IC-MaGeStiC 2021)* (pp. 40-43). Atlantis Press. <https://doi.org/10.2991/acsr.k.220202.009>
- Komarullah, H., Slamini, S., & Wijaya, K. (2024). Pelabelan Koprime Pada Amalgamasi Graf Lengkap dan Graf Berlian. *Limits: Journal of Mathematics and Its Applications*, 21(1), 1-12. <http://dx.doi.org/10.12962/limits.v21i1.13502>
- Lee, S. M., Wui, I., & Yeh, J. (1988). On the amalgamation of prime graphs. *Bull. Malaysian Math. Soc. (Second Series)*, 11, 59-67.
- Mahmudah, M. (2022). Aplikasi pewarnaan graf terhadap penyimpanan bahan kimia. *Jurnal Edukasi: Jurnal Pendidikan, Pembelajaran dan Bimbingan dan konseling*, 10(2), 108-115. <https://doi.org/10.56013/edu.v10i2.2024>
- Prajapati, U., & Shah, K. P. (2018). On odd prime labeling. *International journal of Research and Analytical Reviews*, 5(4), 284-294. https://ijrar.com/upload_issue/ijrar_issue_20542373.pdf
- Robertson, L., & Small, B. (2009). On Newman's conjecture and Prime Trees. *Integers*, 9(2): 117-128. <https://doi.org/10.1515/INTEG.2009.011>
- Rosen, K. H. (2003). *Discrete Mathematics and Its Applications 5th Ed.* McGraw-Hill. Singapore.
- Rosen, K. H. (2011). *Elementary number theory*. London: Pearson Education.
- Tout, A. D. A. N., Dabboucy, A. N., & Howalla, K. (1982). Prime labeling of graphs. *Nat. Acad. Sci. Letters*, 11, 365-368.
- Wallis, W. D. (2001). *Magic Graphs*. Birkhauser. Boston.