J. Sains Dasar 2020 9 (2) 50 - 53

TEOREMA TITIK TETAP PEMETAAN KONTRAKSI-ψ-ω BERNILAI BANYAK PADA RUANG METRIK LENGKAP-α

FIXED POINT THEOREMS FOR MULTIVALUED ψ-ω-CONTRACTION MAPPINGS IN α-COMPLETE METRIC SPACES

Irvandi Gorby Pasangka
Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknik, Universitas Nusa Cendana
email korespondensi: irvandi.p@staf.undana.ac.id

Abstrak

Dalam tulisan ini, akan digunakan konsep jarak-ω pada ruang metrik lengkap-α. Pemetaan yang akan dibuktikan eksistensi titik tetapnya adalah pemetaan kontraksi-ψ-ω bernilai banyak. Pemetaan ini lebih umum dari pemetaan kontraksi-p bernilai banyak yang telah dibuktikan eksistensi titik tetapnya oleh Suzuki dan Takahashi. Karena setiap jarak-ω adalah metrik dan setiap ruang metrik lengkap-α merupakan ruang metrik lengkap, maka dari teorema yang dihasilkan akan diperoleh beberapa akibat di antaranya teorema titik tetap untuk pemetaan Ciric-α-ψ yang diperumum.

Kata kunci: Titik tetap, kontraksi-ψ-ω, jarak-ω.

Abstract

In this paper, we will use the ω-distance concept in α-complete metric spaces. The mapping that will be proved by the existence of a fixed point is multivalued ψ-ω-contraction mappings. This mapping is more general than the multivalued p-contraction mapping that Suzuki and Takahashi proved to have a fixed point. Since every ω-distance is a metric and every α-complete metric space is a complete metric space, the resulting theorem will obtain several consequences including the fixed-point theorem for generalized mapping of α-ψ-Ciric.

Keywords: fixed point, ψ-ω-contraction, ω-distance.

Pendahuluan

Teori titik tetap merupakan salah satu materi di bidang matematika analisis yang memiliki banyak aplikasi, di antaranya adalah untuk membuktikan eksistensi penyelesaian suatu sistem persamaan diferensial. Teorema titik tetap berawal dari ditemukannya Prinsip Kontraksi Banach (Banach's *Contraction Principle*) pada tahun 1922, yaitu teorema titik tetap untuk pemetaan kontraksi. Seiring dengan perkembangan zaman, banyak peneliti yang memperumum teori titik tetap, mulai dari mengubah jenis pemetaannya sampai mengubah ruang pembicaraannya, misalnya ruang metrik *cone*, ruang metrik parsial, ruang modular, dan lain-lain [1–9]. Salah satu peneliti yang mengembangkan teori titik tetap adalah Kada, Suzuki dan Takahashi [4]. Teori titik tetap yang dikembangkan Kada, Suzuki dan Takahashi adalah teori titik tetap menggunakan konsep jarak-ω.

Peneliti lain yang mengembangkan teori titik tetap adalah Hussain, Kutbi, dan Salami [5] yang memperkenalkan ruang metrik lengkap-α. Tahun 2012, Samet, Vetro, dan Vetro [6] memperkenalkan pemetaan kontraksi-α-ψ yang dibuktikan eksistensi titik tetapnya. Tahun 2013, Mohammadi, Rezapour, dan Shahzad [7] mengembangkan pemetaan kontraksi-α-ψ menjadi pemetaan Ciric-α-ψ yang diperumum. Dalam tulisan ini, dibuktikan teorema titik tetap menggunakan konsep jarak-ω pada ruang metrik lengkap-α untuk pemetaan Ciric-α-ψ yang diperumum, yang dinamakan kontraksi-ψ-ω bernilai banyak. Dengan memperumum jenis pemetaan dan ruang pembicaraannya, diharapkan aplikasi yang dihasilkan pun semakin luas.

Metode Penelitian

Dalam penelitian ini, akan digunakan konsep jarak-ω yang merupakan perumuman dari metrik. Selanjutnya akan didefinisikan pemetaan kontraksi-ψ-ω bernilai banyak, yang nantinya akan dibuktikan eksistensi titik tetapnya. Karena jarak-ω lebih umum daripada metrik, maka dari teorema yang dibuktikan akan diperoleh akibat dengan mengganti jarak-ω dengan metrik, begitu juga dengan ruang pembicaraannya, karena ruang metrik lengkap-α merupakan ruang metrik lengkap, maka akan diperoleh akibat dengan mengganti ruang pembicaraannya menjadi ruang metrik.

Copyright © 2020, J. Sains Dasar, ISSN 2085-9872(print), ISSN 2443-1273(online)

Hasil dan Diskusi

Berikut adalah definisi dari jarak-ω yang diberikan oleh Kada, Suzuki dan Takahashi [4].

Definisi 1. Diberikan ruang metrik (X,d). Fungsi $p: X \times X \to [0,\infty)$ disebut jarak-ω pada X jika memenuhi:

a. $p(x,z) \le p(x,y) + p(y,z)$ untuk setiap $x,y,z \in X$,
b. untuk setiap $x \in X$, $p(x,\cdot): X \to [0,\infty)$ fungsi semikontinyu bawah,
c. untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $x,y,z \in X$ dengan $p(z,x) \le \delta$ dan $p(z,y) \le \delta$ berakibat $d(x,y) \le \varepsilon$.

Selanjutnya adalah sifat-sifat penting terkait jarak-ω yang telah dibuktikan oleh Kada, Suzuki dan Takahashi [4].

Lemma 2. Diberikan ruang metrik (X,d) dan jarak-ω p pada X. Jika $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ barisan di X dan $\{\alpha_n\},\{\beta_n\} \subseteq [0,\infty)$ konvergen ke 0, serta $x,y,z \in X$, maka pernyataan-pernyataan berikut berlaku:

a. Jika $p(x_n,y) \le \alpha_n$ dan $p(x_n,z) \le \beta_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ maka $y = z$, lebih lanjut, jika $p(x,y) = 0$ dan $p(x,z) = 0$ maka $y = z$.
b. Jika $p(x_n,y_n) \le \alpha_n$ dan $p(x_n,z) \le \beta_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ maka $\lim_{n\to\infty} y_n = z$.
c. Jika $p(x_n,x_m) \le \alpha_n$ untuk setiap $n,m \in \mathbb{N}$ dengan $m > n$ maka $\{x_n\}$ barisan Cauchy.
d. Jika $p(y,x_n) \le \alpha_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ maka $\{x_n\}$ barisan Cauchy.

Definisi 3. Diberikan himpunan tak kosong X, pemetaan $T: X \to 2^X \setminus \{\emptyset\}$ dan pemetaan $\alpha: X \times X \to [0,\infty)$. Pemetaan T dikatakan admisibel-α jika untuk setiap $x \in X$ dan $y \in T(x)$ dengan $\alpha(x,y) \ge 1$ maka $\alpha(y,z) \ge 1$ untuk setiap $z \in T(y)$.

Berikut diberikan definisi dari admisibel-α dan ruang metrik lengkap-α yang diberikan oleh Hussain, Kutbi, dan Salami [5].

Definisi 4. Diberikan himpunan tak kosong X, pemetaan $T: X \to 2^X \setminus \{\emptyset\}$ dan pemetaan $\alpha: X \times X \to [0,\infty)$. Pemetaan T dikatakan admisibel-α jika untuk setiap $x \in X$ dan $y \in T(x)$ dengan $\alpha(x,y) \ge 1$ maka $\alpha(y,z) \ge 1$ untuk setiap $z \in T(y)$.

Definisi 5. Diberikan ruang metrik (X,d) dan pemetaan $\alpha: X \times X \to [0,\infty)$. Ruang metrik (X,d) disebut ruang metrik lengkap-α jika setiap barisan Cauchy $\{x_n\}$ di X dengan $\alpha(x_n,x_{n+1}) \ge 1$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, konvergen di X.

Selanjutnya dinotasikan $D_p(x,T(z)) = \inf\{p(x,y) : y \in T(z)\}$ dengan $x,z \in X$ dan keluarga semua fungsi naik monoton $\psi: [0,\infty) \to [0,\infty)$ dengan $\sum_{n=0}^{\infty} \psi^n(t) < \infty$ untuk setiap $t > 0$ dinotasikan dengan $\mathbf{\Psi}$. Lebih lanjut jika $\psi \in \mathbf{\Psi}$ maka $\psi(t) < t$ untuk setiap $t > 0$ dan $\psi(0) = 0$.

Definisi 6. Diberikan ruang metrik (X,d). Pemetaan $T: X \to 2^X \setminus \{\emptyset\}$ disebut pemetaan kontraksi-ψ-ω jika terdapat $\psi \in \mathbf{\Psi}$ dan p jarak-ω yang memenuhi untuk setiap $x,y \in X$ dan $u \in T(x)$ terdapat $v \in T(y)$ dengan

$$\alpha(u,v)p(u,v) \le \psi(\max\{j,k,l,m\}),$$

di mana $m = \frac{1}{2}[D_p(x,T(y)) + D_p(y,T(x))]$, $j = p(x,y)$, $k = D_p(x,T(x))$ dan $l = D_p(y,T(y))$.

Teorema 7. Diberikan ruang metrik (X,d), pemetaan $T: X \to 2^X \setminus \{\emptyset\}$ dan $\alpha: X \times X \to [0,\infty)$. Jika (X,d) ruang metrik lengkap-α dan memenuhi:

(1) T adalah pemetaan kontraksi-ψ-ω dengan p jarak-ω yang memenuhi $p(x,x) = 0$ untuk setiap $x \in X$,
(2) T pemetaan admisibel-α,
(3) terdapat $x_0 \in X$ dan $x_1 \in T(x_0)$ sehingga $\alpha(x_0,x_1) \ge 1$,
(4) untuk setiap $y \in X$ dengan $y \notin T(y)$ berlaku
$$\inf\{p(x,y) + D_p(x,T(x)) : x \in X\} > 0,$$

maka T mempunyai titik tetap.

Bukti. Berdasarkan (3), terdapat $x_0 \in X$ dan $x_1 \in T(x_0)$ sehingga $\alpha(x_0,x_1) \ge 1$, selanjutnya menurut (1) terdapat $x_2 \in T(x_1)$ sehingga

$$\alpha(x_1,x_2)p(x_1,x_2) \le \psi\left(\max\left\{k_1,k_2,k_3,\frac{1}{2}[k_4+k_5]\right\}\right) \quad (5)$$

dengan $k_1 = p(x_0,x_1)$, $k_2 = D_p(x_0,T(x_0))$ dan $k_3 = D_p(x_1,T(x_1))$, $k_4 = D_p(x_0,T(x_1))$, dan $k_5 = D_p(x_1,T(x_0))$. Karena T pemetaan admisibel-α dan $x_1 \in T(x_0)$ sehingga $\alpha(x_0,x_1) \ge 1$ diperoleh

$$\alpha(x_1,x_2) \ge 1. \quad (6)$$

Berdasarkan (5) dan (6) diperoleh

$$\begin{aligned} p(x_1,x_2) &\le \alpha(x_1,x_2)p(x_1,x_2) \\ &\le \psi\left(\max\left\{k_1,k_2,k_3,\tfrac{1}{2}[k_4+k_5]\right\}\right) \\ &\le \psi\left(\max\left\{k_1,p(x_0,x_1),k_3,\tfrac{1}{2}[k_4+p(x_1,x_1)]\right\}\right) \\ &\le \psi\left(\max\left\{p(x_0,x_1),k_3,\tfrac{1}{2}[p(x_0,x_1)+D_p(x_1,T(x_1))]\right\}\right) \\ &\le \psi\big(\max\{p(x_0,x_1),D_p(x_1,T(x_1))\}\big). \end{aligned}$$

Jika $\max\{p(x_0,x_1),D_p(x_1,T(x_1))\} = D_p(x_1,T(x_1))$ maka

$D_p(x_1, T(x_1)) \leq p(x_1, x_2) \leq \psi(D_p(x_1, T(x_1)))$, sehingga $D_p(x_1, T(x_1)) = 0$ dan $p(x_1, x_2) = 0$, akibatnya $p(x_0, x_1) = 0$. Karena $p(x_0, x_2) \leq p(x_0, x_1) + p(x_1, x_2) = 0$, maka $p(x_0, x_2) = 0$. Berdasarkan Lemma 2, karena $p(x_0, x_1) = 0$ dan $p(x_0, x_2) = 0$ maka $x_1 = x_2$. Jadi $x_1 = x_2 \in T(x_1)$. Selanjutnya jika $\max\{p(x_0, x_1), D_p(x_1, T(x_1))\}$ adalah $p(x_0, x_1)$, maka diperoleh

$$p(x_1, x_2) \leq \psi(p(x_0, x_1)). \quad (7)$$

Dilakukan proses yang sama untuk $x_1 \in X$ dan $x_2 \in T(x_1)$, menurut (1) terdapat $x_3 \in T(x_2)$ sehingga

$$\begin{aligned} &\alpha(x_2, x_3)p(x_2, x_3) \\ &\leq \psi\left(\max\left\{j_1, j_2, j_3, \tfrac{1}{2}[j_4 + j_5]\right\}\right) \\ &\leq \psi\left(\max\left\{p(x_1, x_2), D_p\left(x_2, T(x_2)\right)\right\}\right) \quad (8) \end{aligned}$$

dengan $j_1 = p(x_1, x_2)$, $j_2 = D_p(x_1, T(x_1))$, $j_3 = D_p(x_2, T(x_2))$, $j_4 = D_p(x_1, T(x_2))$ dan $j_5 = D_p(x_2, T(x_1))$. Karena T pemetaan admisibel-α dan $x_2 \in T(x_1)$ sehingga $\alpha(x_1, x_2) \geq 1$ diperoleh

$$\alpha(x_2, x_3) \geq 1. \quad (9)$$

Berdasarkan (8) dan (9) diperoleh

$$\begin{aligned} p(x_2, x_3) &\leq \alpha(x_2, x_3)p(x_2, x_3) \\ &\leq \psi\left(\max\left\{j_1, j_2, j_3, \tfrac{1}{2}[j_4 + j_5]\right\}\right) \\ &\leq \psi\left(\max\left\{p(x_1, x_2), D_p\left(x_2, T(x_2)\right)\right\}\right). \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama, jika $\max\left\{p(x_1, x_2), D_p\left(x_2, T(x_2)\right)\right\} = D_p\left(x_2, T(x_2)\right)$ maka $p(x_1, x_2) = 0$, akibatnya $x_1 = x_2 \in T(x_1)$. Jika $\max\{p(x_1, x_2), D_p(x_2, T(x_2))\} = p(x_1, x_2)$, maka $p(x_2, x_3) \leq \psi(p(x_1, x_2))$. Karena ψ monoton naik dan berdasarkan (7) diperoleh

$$\begin{aligned} p(x_2, x_3) &\leq \psi\left(p(x_1, x_2)\right) \\ &\leq \psi\left(\psi\left(p(x_0, x_1)\right)\right) \\ &= \psi^2\left(p(x_0, x_1)\right). \end{aligned}$$

Proses dilanjutkan sehingga diperoleh barisan $\{x_n\}$ di X sehingga $x_n \in T(x_{n-1})$, $p(x_n, x_{n+1}) \leq \psi^n(p(x_0, x_1))$ dan $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Jadi untuk setiap $n, m \in \mathbb{N}$ dengan $m > n$ diperoleh

$$\begin{aligned} p(x_n, x_m) &\leq p(x_n, x_{n+1}) + p(x_{n+1}, x_{n+2}) \\ &\quad + \cdots + p(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq \psi^n(p(x_0, x_1)) + \psi^{n+1}(p(x_0, x_1)) + \\ &\quad \cdots + \psi^{m-1}(p(x_0, x_1)) \\ &\leq \textstyle\sum_{i=n}^{\infty} \psi^i\,(t_0). \end{aligned}$$

Karena $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=n}^{\infty} \psi^i\,(t_0) = 0$, maka berdasarkan Lemma 2 diperoleh $\{x_n\}$ barisan Cauchy. Karena $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy, $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan X ruang metrik lengkap-α, maka terdapat $z \in X$ sehingga $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = z$. Diambil sebarang $n \in \mathbb{N}$, karena $p(x_n, \cdot)$ semikontinyu bawah, maka

$$p(x_n, z) \leq \liminf_{m\to\infty} p(x_n, x_m) \leq \sum_{i=n}^{\infty} \psi^i\,(t_0).$$

Selanjutnya, diandaikan $z \notin T(z)$. Berdasarkan (2) diperoleh

$$\begin{aligned} 0 &< \inf\{p(x, z) + D_p(x, T(x)) : x \in X\} \\ &\leq \inf\{p(x_n, z) + D_p(x_n, T(x_n)) : n \in \mathbb{N}\} \\ &\leq \inf\{p(x_n, z) + p(x_n, x_{n+1}) : n \in \mathbb{N}\} \\ &\leq \inf\{\sum_{i=n}^{\infty} \psi^i\,(t_0) + \psi^n(t_0) : n \in \mathbb{N}\} \\ &\leq 2\inf\{\sum_{i=n}^{\infty} \psi^i\,(t_0) : n \in \mathbb{N}\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Akibatnya terjadi kontradiksi. Dengan demikian diperoleh $z \in T(z)$. ∎

Akibat 8. Diberikan ruang metrik (X, d), pemetaan $T : X \to 2^X \setminus \{\emptyset\}$ dan $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$. Jika (X, d) ruang metrik lengkap-α dan untuk setiap $x, y \in X$ dan $u \in T(x)$ terdapat $v \in T(y)$ dengan

$$\alpha(u, v)d(u, v) \leq \psi(\max\{j, k, l, m\}),$$

di mana $m = \frac{1}{2}[d(x, T(y)) + \mathrm{d}(y, T(x))]$, $j = d(x, y)$, $k = d(x, T(x))$, $l = d(y, T(y))$, dan memenuhi:

(10) T pemetaan admisibel-α,

(11) terdapat $x_0 \in X$ dan $x_1 \in T(x_0)$ sehingga $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$,

(12) untuk setiap $y \in X$ dengan $y \notin T(y)$ berlaku
$$\inf\{d(x, y) + \mathrm{d}(x, T(x)) : x \in X\} > 0,$$

maka T mempunyai titik tetap.

Akibat 9. Diberikan ruang metrik lengkap (X, d) dan pemetaan $T : X \to 2^X \setminus \{\emptyset\}$. Jika untuk setiap $x, y \in X$ dan $u \in T(x)$ terdapat $v \in T(y)$ dengan

$$\alpha(u, v)d(u, v) \leq \psi(\max\{j, k, l, m\}),$$

di mana $m = \frac{1}{2}[d(x, T(y)) + \mathrm{d}(y, T(x))]$, $j = d(x, y)$, $k = d(x, T(x))$, $l = d(y, T(y))$, dan memenuhi untuk setiap $y \in X$ dengan $y \notin T(y)$ berlaku $\inf\{d(x, y) + \mathrm{d}(x, T(x)) : x \in X\} > 0$, maka T mempunyai titik tetap.

Syarat $p(x, x) = 0$ untuk setiap $x \in X$ pada Teorema 7 dapat dihilangkan dengan cara mengubah jenis pemetaannya, yaitu menghilangkan $D_p(y, T(x))$ pada Definisi 6. Berikut adalah teoremanya.

Teorema 10. Diberikan ruang metrik (X, d), pemetaan $T : X \to 2^X \setminus \{\emptyset\}$ dan $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$. Jika (X, d) ruang metrik lengkap-α dan memenuhi:

Copyright © 2020, J. Sains Dasar, ISSN 2085-9872(print), ISSN 2443-1273(online)

(13) terdapat jarak-ω p yang memenuhi untuk setiap $x, y \in X$ dan $u \in T(x)$ terdapat $v \in T(y)$ dengan
$$\alpha(u,v)p(u,v) \leq \psi(\max\{m_1, m_2, m_3, m_4\}),$$
di mana $m_4 = \frac{1}{2}D_p(x, T(y))$, $m_1 = p(x,y)$, $m_2 = D_p(x, T(x))$ dan $m_3 = D_p(y, T(y))$

(14) T pemetaan admisibel-α,

(15) terdapat $x_0 \in X$ dan $x_1 \in T(x_0)$ sehingga $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$,

(16) untuk setiap $y \in X$ dengan $y \notin T(y)$ berlaku
$$\inf\{p(x,y) + D_p(x, T(x)) : x \in X\} > 0,$$
maka T mempunyai titik tetap.

Bukti. Berdasarkan (15), terdapat $x_0 \in X$ dan $x_1 \in T(x_0)$ sehingga $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$, selanjutnya menurut (13) terdapat $x_2 \in T(x_1)$ sehingga
$$\alpha(x_1, x_2)p(x_1, x_2) \leq \psi\left(\max\left\{k_1, k_2, k_3, \tfrac{1}{2}k_4\right\}\right) \tag{17}$$
dengan $k_1 = p(x_0, x_1)$, $k_2 = D_p(x_0, T(x_0))$ dan $k_3 = D_p(x_1, T(x_1))$, dan $k_4 = D_p(x_0, T(x_1))$. Karena T pemetaan admisibel-α dan $x_1 \in T(x_0)$ sehingga $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$ diperoleh
$$\alpha(x_1, x_2) \geq 1. \tag{18}$$
Berdasarkan (17) dan (18) diperoleh
$$\begin{aligned} p(x_1, x_2) &\leq \alpha(x_1, x_2)p(x_1, x_2) \\ &\leq \psi\left(\max\left\{k_1, k_2, k_3, \tfrac{1}{2}k_4\right\}\right) \\ &\leq \psi\left(\max\left\{k_1, p(x_0, x_1), k_3, \tfrac{1}{2}k_4\right\}\right) \\ &= \psi\left(\max\left\{p(x_0, x_1), k_3, \tfrac{1}{2}k_4\right\}\right) \\ &\leq \psi\left(\max\left\{p(x_0, x_1), k_3, \tfrac{1}{2}\left[p(x_0, x_1) + D_p\big(x_1, T(x_1)\big)\right]\right\}\right) \\ &\leq \psi\big(\max\{p(x_0, x_1), D_p\big(x_1, T(x_1)\big)\}\big). \end{aligned}$$
Selanjutnya dengan cara yang sama pada Teorema 7 diperoleh terdapat $z \in X$ sehingga $z \in T(z)$. ■

Simpulan

Berdasarkan hasil tersebut dapat disimpulkan pemetaan kontraksi-ψ-ω bernilai banyak memiliki titik tetap di ruang metrik lengkap-α dengan menambahkan syarat seperti jarak-ω yang digunakan harus memenuhi $p(x,x) = 0$ untuk setiap $x \in X$. Syarat ini dapat dihilangkan dengan menghilangkan $D_p(y, T(x))$ pada jenis pemetaannya. Masih banyak jenis pemetaan yang telah dikembangkan dan dibuktikan eksistensi titik tetapnya di ruang metrik, dan konsep jarak-ω lebih umum daripada metrik. Ruang metrik lengkap-α lebih umum daripada ruang metrik, maka masih banyak kemungkinan untuk mengembangkan teorema titik tetap dengan menggunakan konsep jarak-ω di ruang metrik lengkap-α.

Pustaka

[1] Almezel, S., Ansari, Q. H., & Khamsi, M. A. (Eds.). (2014). *Topics in fixed point theory* (Vol. 5). Switzerland: Springer.

[2] Naheed, S., & Bano, A. (2012). Fixed point and coincidence point theorems. *Tamkang Journal of Mathematics, 43*(1), 27-32.

[3] Durmaz, G., Mınak, G., & Altun, I. (2014, January). Fixed point results for α-ψ-contractive mappings including almost contractions and applications. In *Abstract and Applied Analysis* (Vol. 2014). Hindawi.

[4] Kada, O., Suzuki, T., & Takahashi, W. (1996). Nonconvex minimization theorems and fixed point theorems in complete metric spaces. *Mathematica Japonicae, 44*(2), 381-391.

[5] Hussain, N., Kutbi, M. A., & Salimi, P. (2014). Fixed point theory in-complete metric spaces with applications. In *Abstract and Applied Analysis* (Vol. 2014). Hindawi.

[6] Samet, B., Vetro, C., & Vetro, P. (2012). Fixed point theorems for α–ψ-contractive type mappings. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 75*(4), 2154-2165.

[7] Mohammadi, B., Rezapour, S., & Shahzad, N. (2013). Some results on fixed points of α-ψ-Ciric generalized multifunctions. *Fixed Point Theory and Applications, 2013*(1), 1-10.

[8] Kutbi, M. A., & Sintunavarat, W. (2014). Fixed point theorems for generalized w α-contraction multivalued mappings in α-complete metric spaces. *Fixed Point Theory and Applications, 2014*(1), 1-9.

[9] Suzuki, T., & Takahashi, W. (1996). Fixed point theorems and characterizations of metric completeness. *Topological Methods in Nonlinear Analysis, 8*(2), 371-382.

Copyright © 2020, J. Sains Dasar, ISSN 2085-9872(print), ISSN 2443-1273(online)