APLIKASI PERSAMAAN DIFERENSIAL DALAM EKONOMI

Oleh

Muhammad Fauzan, Sugiman dan Sahid

Abstrak

Persamaan diferensial merupakan bagian dari Matematika yang termasuk dalam cabang Matematika Terapan. Sebagai suatu ilmu, Persamaan Diferensial mempunyai implikasi yang cukup banyak untuk bidang ilmu lainnya, di antaranya Fisika, Biologi, Elektro, dan Ekonomi.

Dalam bidang Ekonomi, Persamaan Diferensial dapat digunakan untuk menentukan harga kesetimbangan. Ini dapat dilakukan dengan terlebih dahulu membentuk model matematika dari permasalahan yang ada yang menyangkut: penawaran, permintaan, harga dan persediaan barang. Selanjutnya, dengan menyelesaikan model matematika yang telah disusun, diperoleh harga kesetimbangannya.

Pendahuluan

Dalam aplikasi Matematika pada bidang lainnya, seperti Fisika, Biologi, Elektro, dan Ekonomi selalu berkaitan dengan Persamaan Diferensial. Untuk bidang Ekonomi, Persamaan Diferensial dapat digunakan untuk menurunkan kesetimbangan harga penawaran dan permintaan. Langkah awal yang dilakukan adalah membentuk suatu model matematika dari masalah-masalah ekonomi yang ada.

Berbeda dengan pemodelan fisika yang diatur oleh hukum-hukum alam yang ketat, pemodelan ekonomi diatur oleh hanya hukum-hukum ekonomi yang sederhana dan tidak banyak jumlahnya. Dapat juga dikatakan bahwa hukum-hukum ekonomi yang mengatur fenomena-fenomena ekonomi umumnya tidak atau belum diketahui. Situasi ini justru memudahkan para matematisi untuk bereksperimen dengan pemodelan ekonomi.

Permasalahannya adalah bagaimana cara membentuk model matematika yang sesuai sehingga dapat diturunkan rumus kesetimbangan harga hanya dengan mempergunakan langkah-langkah yang benar dalam Matematika dan persamaan diferensial?

Tujuan tulisan ini adalah untuk menguraikan aplikasi Persamaan Diferensial dalam ekonomi hanya dengan mengetahui gejala-gejala dalam ekonomi dan mempergunakan langkah-langkah yang benar dalam Matematika untuk membentuk model matematika yang sesuai. Hal ini berguna untuk menambah wawasan aplikasi matematika dalam bidang ilmu lainnya di luar matematika.

Pembahasan

Untuk menyelesaikan masalah tersebut dengan menggunakan Matematika terdapat tiga langkah yang harus dilakukan:

Langkah 1: Mencari suatu model matematika dari proses. yaitu penerjemahan informasi yang diberikan dan data ke dalam bentuk matematika, yaitu ke dalam suatu model matematika.

Langkah 2: Menyelesaikan model matematika. Yaitu pencarian selesaian model matematika dengan pemilihan dan penggunaan metoda matematika yang sesuai.

Langkah 3: Interpretasi hasil yang diperoleh, yaitu pemahanan arit dan implikasi selesaian matematika untuk masalah khusus.

Berikut akan dibahas aplikasi Persamaan Diferensial Linier Orde Satu dan Persamaan Diferensial Linier Orde Dua dalam menentukan harga kesetimbangan penawaran dan permintaan.

Aplikasi Persamaan Diferensial Linier Orde Satu dalam Ekonomi

Di sini akan didiskusikan sebuah model yang berhubungan dengan penawaran, permintaan dan harga pasar dari komoditi tunggal, seperti beras, telur, mobil, minyak dan lain-lain. Model yang paling sederhana yang akan digunakan adalah model linier.

Langkah 1: Menyusun Model Matematika

Dipunyai tiga peubah untuk komoditi: permintaan D, penawaran Q dan harga P. Permintaan D tergantung pada harga. Jadi, secara umum dapat dituliskan

$$D = D(P).$$

Akan tetapi, model yang akan dibuat adalah linier, sehingga model yang mungkin hanyalah

$$D(P) = a + bP$$

dengan a, b, konstanta dan $b<0$.
b bernilai negatif karena harga naik mengakibatkan permintaan turun.

Penawaran Q juga tergantung pada harga, sehingga secara umum dapat ditulis

$$Q = Q(P).$$

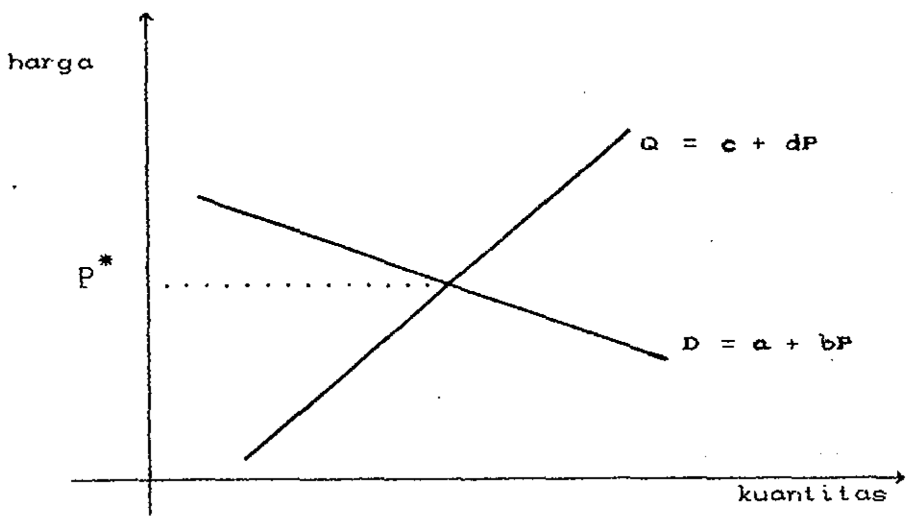
Akan tetapi, karena modelnya linier maka model yang mungkin hanyalah

$$Q(P) = c + dP$$

dengan c dan d konstanta dan $d>0$.
d bernilai positif karena harga naik mengakibatkan produksi ikut naik.

Hubungan antara harga, permintaan dan penawaran, di mana D sebagai fungsi dari P adalah monoton turun dan Q sebagai fungsi dari P adalah monoton naik, dapat dilihat pada Gambar 1 berikut:

Gambar 1



P* adalah harga kesetimbangan bila penawaran = permintaan,

yaitu $D = Q$
atau
$$a + bP = c + dP$$
sehingga diperoleh
$$P = \frac{a - c}{d - b} = P^* \text{ (harga kesetimbangan)}$$

Selanjutnya, dianggap harga dari produksi bukan harga kesetimbangan. Jika $P > P^*$, maka penawaran melebihi permintaan $(Q>D)$ dan harga akan jatuh. Sebaliknya, apabila $P<P^*$ maka permintaan melebihi penawaran $(D>Q)$ dan harga akan naik.

Untuk menggambarkan situasi ini dalam model matematika dengan batasan dari model linier kita gunakan persamaan diferensial
$$\frac{dP}{dt} = \gamma(D-Q) \tag{3}$$
dengan γ konstanta, $\gamma>0$.
Sekarang model menjadi lengkap. Dipunyai tiga persamaan yaitu persamaan (1), (2) dan (3) dengan tiga peubah D, Q, dan P. Bila persamaan (1) dan (2) disubstitusikan ke persamaan (3) diperoleh
$$\frac{dP}{dt} = \gamma(a + bP - c - dP)$$
atau
$$\frac{dP}{dt} + \gamma(d-b)P = \gamma(a-c) \tag{4}$$
yang tidak lain adalah persamaan diferensial linier orde satu.

Langkah 2: Menyelesaikan Model Matematika

Bandingkan persamaan (4) dan $\frac{dy}{dt} + f(t)y = r(t)$
dengan selesaian
$$y(t) = e^{-h(t)} \int e^{h(t)} r(t) \, dt + Ce^{-h(t)}$$
dengan $h(t) = \int f(t)\, dt$
Di sini
$$y = p \ ; \ f(t) = \gamma(d-b) \ ; \ r(t) = \gamma(a-c) \ ;$$
$$h(t) = \int f(t)\, dt = \int \gamma(d-b)\, dt = \gamma(d-b)t \ ;$$
sehingga
$$P(t) = e^{-\gamma(d-b)t} \int e^{\gamma(d-b)t} \gamma(a-c)\, dt + Ce^{-\gamma(d-b)t}$$

$$= e^{-\gamma(d-b)t} \frac{\gamma(a-c)}{\gamma(d-b)} e^{\gamma(d-b)t} Ce^{-\gamma(d-b)t}$$

$$= \frac{a-c}{d-b} + Ce^{-\gamma(d-b)t}$$

Sekarang karena $\gamma>0$, $d>0$ dan $b>0$, mengakibatkan $\gamma(d-b)>0$ sehingga suku eksponensial akan menuju ke nol bila t menjadi cukup besar (tak hingga) yaitu

$$P(t) \longrightarrow \frac{a-c}{d-b} = P^*$$

yang merupakan nilai kesetimbangan harga.

Langkah 3: Menentukan Selesaian Khusus untuk Masalah Khusus

Contoh 1:

Diketahui fungsi penawaran Q adalah: $Q(P) = 25 + P$ dan fungsi permintaan D adalah $D(P) = 150 - \frac{3}{2}P$. Berapakah harga kesetimbangannya? Gambarkanlah kurvanya dan hitunglah secara matematis.

Selesaian:

Fungsi D: $D(P) = 150 - \frac{3}{2}P$

Fungsi Q: $Q(P) = 25 + P$

Di sini $a = 150$; $b = -\frac{3}{2}$; $c + 25$; $d = 1$

Maka harga kesetimbangan:

$$P = \frac{a-c}{d-b} = \frac{150 - 25}{1 + \frac{3}{2}}$$

$$= \frac{125}{5/2} = 50$$

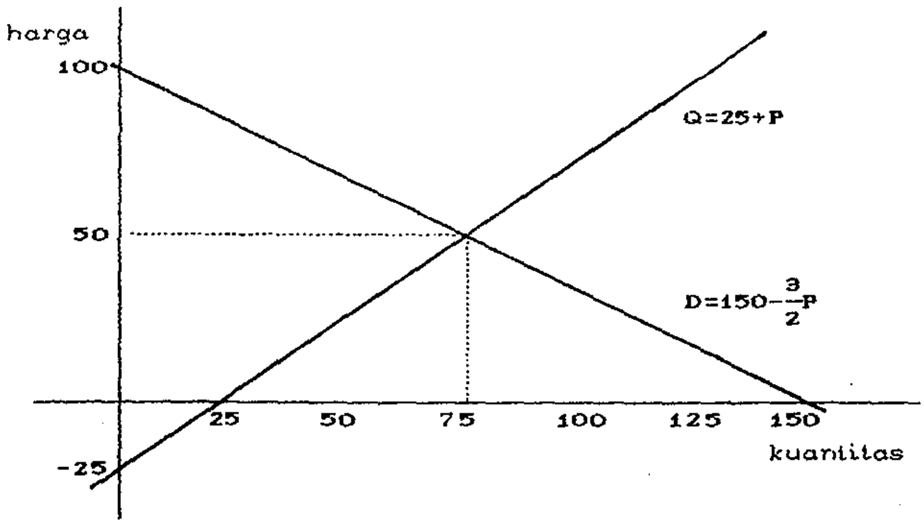
Jadi, harga kesetimbangan $P = 50$.

Dengan harga kesetimbangan ini jumlah barang yang dijual adalah

$$Q = 25 + P = 75$$

Kurva penawaran dan permintaan dapat dilihat pada Gambar 2 berikut:

Gambar 2



Aplikasi Persamaan Diferensial Linier Orde Dua dalam Ekonomi

Langkah 1: Menyusun Model Matematika

Dalam model yang telah didiskusikan sebelumnya untul suatu industri tunggal dipunyai

$$D = a + bP \quad (5)$$

$$Q = c + dP \quad (6)$$

Sekarang dibuat model pengaruh dari persediaa barang. Dianggap tidak semua penawaran terjual. Maka per sediaan barang akan semakin banyak. Jumlah persediaa barang S(t) dari waktu t=0 sampai t="t" akan menjadi

$$S(t) = S(0) + \int_{0}^{t} [Q(\tau) - D(\tau)]\, d\tau$$

Bila didiferensialkan menjadi

$$\frac{dS}{dt} = Q(t) - D(t) \quad (7)$$

Persamaan harga yang sesuai dalam model sebelumnya adalal

$$\frac{dP}{dt} = \gamma(D-Q) = -\gamma\frac{dS}{dt}$$

Selanjutnya model ini dimodifikasi. Jelas sekali bahwa bila persediaan barang bertambah banyak dari suatu tingkat yang sudah ditetapkan sebelumnya, yaitu $S_o = S(0)$ maka diperlukan biaya untuk menyimpannya sehingga harga akan jatuh sebagaimana produsen mencoba menghabiskan kelebihan persediaan barang. Bagaimanapun jika persediaan barang jatuh di bawah tingkat yang diinginkan maka harga barang akan naik. Jadi diperoleh

$$\frac{dP}{dt} = -\gamma\frac{dS}{dt} + \lambda(S_o - S) \tag{8}$$

dengan $\lambda > 0$ suatu konstanta.

Sampai saat ini dipunyai empat persamaan (5), (6), (7) dan (8) dengan lima peubah D, Q, S, P, S_o.

Cukup beralasan untuk menganggap bahwa tingkat optimal persediaan barang, S_o, tergantung pada permintaan D sehingga dipunyai

$$S_o = lD + m \tag{9}$$

dengan l, m suatu konstanta.

Sekarang, persamaan (5) sampai (9) memberikan suatu model yang tertutup.

Langkah 2: Menyelesaikan Model Matematika

Dengan menggunakan persamaan (5) sampai (9) untuk mengeliminasi D, Q dan S_o, diperoleh

$$\frac{dP}{dt} + \{\gamma\,(d-b) - \lambda lb\}\,P + \lambda S = \gamma(a-c) + \lambda(la+m) \tag{10}$$

$$\frac{dS}{dt} - (d-b)P = c-a \tag{11}$$

dalam keadaan setimbang

$$\frac{dP}{dt} = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{dS}{dt} = 0$$

sehingga dari persamaan (11) diperoleh

$$P^* = -\left[\frac{c-a}{d-b}\right] \tag{12}$$

yang merupakan nilai kesetimbangan harga.

Selanjutnya, dari persamaan (10) diperoleh

$$\lambda S^* = \gamma(a-c) + \lambda(la+m) - \gamma(d-b)P^* + \lambda lbP^*$$

dan menggunakan (12)

$$\gamma(d-b)P^* = \gamma(a-c)$$

maka diperoleh

$$S^* = la + m + lb\left[\frac{a - c}{d - b}\right] \qquad (13)$$

Dalam keadaan setimbang, persamaan (10) dan (11) menjadi

$$\{\gamma(d\text{-}b) - \lambda lb\}P^* + \lambda S^* = \gamma(a\text{-}c) + \lambda(la+m) \qquad (14)$$

dan

$$-(d\text{-}b)P^* = c\text{-}a \qquad (15)$$

Dari persamaan (10), bila didiferensialkan akan diperoleh

$$\frac{d^2P}{dt^2} + \alpha\frac{dP}{dt} + \lambda\frac{dS}{dt} = 0$$

dengan $\alpha = \gamma(d\text{-}b) - \lambda lb$.

Untuk mengeliminasi $\frac{dS}{dt}$, digunakan persamaan (11), sehingga diperoleh

$$\frac{d^2P}{dt^2} + \alpha\frac{dP}{dt} + \lambda\beta P = -\lambda(c\text{-}a)$$

dengan $\beta = d\text{-}b$.

Persamaan terakhir ini merupakan persamaan diferensia linier orde dua.

Persamaan karakteristiknya,

$$x^2 + \alpha x + \lambda\beta = 0$$

dengan akar-akar karakteristiknya

$$x_{1,2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\lambda\beta}}{2}$$

sehingga selesaian umum persamaan diferensial ialah

$$P(t) = Ae^{x_1 t} + Be^{x_2 t} + P^*$$

dengan $P^* = \dfrac{-\lambda(c - a)}{\lambda(d - b)} = -\dfrac{c - a}{d - b}$

Kesimpulan

Berdasarkan uraian sebelumnya, dapat disimpulka bahwa dengan hanya menggunakan pengetahuan Persamaa Diferensial dan langkah-langkah yang benar dalam pemodela matematika, dapat diturunkan rumus untuk mencari harg kesetimbangan dalam penawaran dan permintaan dalam ilm ekonomi hanya dengan mengetahui masalah-masalah ekonom tanpa perlu mengetahui ilmu ekonomi yang berkaitan.

Daftar Pustaka

Daniel P. Maki and Maynard Thompson. 1979. *Mathematical Models and Applications*. New Jersey: Prentice-Hall Inc.

David L. Clement. 1992. Kuliah Matematika Terapan pada Program BSBP VI di ITB Bandung.

Kreyszig Erwin. 1988. *Advanced Engineering Mathematics*. New York: John Wiley & Sons.

Suwono Edi. 1992."Suatu Model Chaos Sederhana dalam Ekonomi". Majalah Ilmiah Himpunan Matematika Indonesia. Vol.I, Nomor 1, 1992-1993, hal.55-60.